數論上的一些有趣問題

● 傳俊結*

數論是數學眾多領域中的一個分支，主要的研究對象是整數，特別是自然數，也就是 1，2，3，4....等等。數論和數學上的其他分支比較起來，有一個特性是它們所沒有的。就是數論上的很多研究題目敘述簡單，很容易理解，甚至只要國中程度就可理解。但是它的解答卻往往非常之難，尤其有鑾多敘述非常簡單容易理解的數論問題，到目前為止，三百多年來還是得不到解答。

我們要談的第一個問題是費馬最後定理。

費馬是三百多年前法國的一位業餘數學家，他的本業是律師。雖然如此，費馬對後來牛頓和萊布尼茲的發明微積分，也打下一些關鍵性的基礎。

費馬死後，他的後人在他的筆記本上看到這樣的命題：

當 $n \geq 3$ 是自然數時，則 $x^n + y^n = z^n$ 沒有非零的整數解。

而且在筆記的後面，費馬註記，因為筆記本已經沒有空間讓他寫下一個他想到的漂亮證明。

現在可以確定的是，費馬的註記一定是謊話。因為這個所謂費馬最後定理，十八年前才被 Wiles 和他的學生 Taylor 所證明。而他們所用的工具，費馬一定不曉得。而是一百年來代數數論發展出來的新工具。他們的證明寫了將近一百頁，到目前為止也

---

* 傳俊結，南台科技大學電子工程系副教授。

找不到新的或者比較簡單的方法可以簡化他們的證明。

費馬最後定理的敘述，相信只要國中生的程度也可以理解。當 $n=2$ 時，$x^2+y^2=z^2$ 是有整數解的。例如，$3^2+4^2=5^2$，事實上這就是直角三角形畢氏定理的一種形式。

我們要談的第二個問題，稱為哥德巴赫(Goldbach)猜測。這個猜測是哥德巴赫在寫給大數學家 Euler 的信中提出來的。它的敘述是這樣的：

任何大於二的偶數一定可以寫成兩個質數的和。

所謂質數，就是只能被 1 還有本身整除之自然數。也就是說，任何質數的因數只有 1 和自己。例如，$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17.....$ 等等。

我們雖然可以寫下很多偶數滿足哥德巴赫猜測的例子。例如 $4=2+2,\quad 8=3+5,\quad 16=3+13,\quad 30=13+17,\quad 56=13+43,\quad 62=19+43,\quad 100=17+83,$ ....等等。

但是，到目前為止還沒有人可以證明，對所有偶數哥德巴赫猜測均成立。也沒有人可以舉出一個反例。就是說，寫出一個偶數，但這個偶數沒辦法寫成兩個質數之和。

哥德巴赫猜測目前最好的結果是，陳景潤在 1966 年所證明的。他證明，任何一個大於 2 的偶數，一定可以寫成兩個數之和，其中一個是質數，另外一個數，可以寫成兩個質數之乘積。根據算術基本定理， 每一個自然數一定可以分解成質數相乘，就是我們國中所學的因數分解。所以陳景潤的結果跟哥德巴赫猜測相比就只差那麼一步。

最令人震驚的是，陳景潤的這個結果是在中國文化大革命時，他被下放到農村勞改時，作出來的。在那麼艱困的年代，能完成這樣的工作，真是不簡單。也因此四人幫那時就把陳景潤當做樣板，拿來宣傳文化大革命的成就。