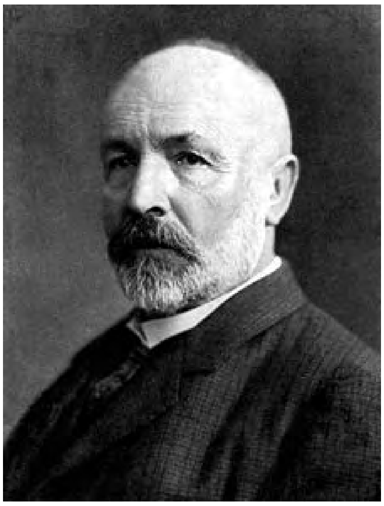
南台通識電子報
2015 年 5 月 15 日出版
南台科技大學通識教育中心 發行
54

無窮大

● 傅俊結*


康托爾：集合論的發明人

無窮大或者無限大(infinity)這個概念，可以說是自從人類有理性的知識概念以來一直所追求的、想要了解的。即使如此，有關無窮大的一些問題到現在我們還是無法理解。甚至，個人覺得，人類已經放棄理解。

我們從念國小時，就知道如何比較數的大小，即使沒有受過教育的人，長大之後，也知道兩個蘋果比一個蘋果多。我們日常生活所比較的大小都是比較有限的數，但是像無窮大這種量要怎麼比較呢？舉個簡單的例子，所有的自然數 1，2，3，4⋯.的個數，還有所有偶數 2，4，6，8⋯的個數，哪一類的個數比較多呢？我們知道他們都是有無窮多。直覺上自然數好像比偶數還多，因為自然數還有包括奇數，但是這是直覺上，實際上，這種比較方式在邏輯上是行不通的，甚至是不對的，因為無窮大不是我們一般所謂的數，它是數學家想像出來的一種量，這個量會比所有已知的數還大。也就是說，不能把無窮大這個量拿來像數一樣來比較，比如說無窮大減無窮大，我們不能說它等於零，也不能說兩倍的無窮大減掉無窮大等於無窮大。總之，無窮大這個量不能拿來像有限的數一般做加減乘除運算。

歷史上第一個對無窮大這個概念做深入研究的是十九世紀德國數學家康托爾，他也是集合論的發明人，也是現今微積分基礎的奠基人之一，他對無窮大的研究可以說是前無古人，但是基本上也是他悲慘一生的開始。因為他對無窮大的研究導致他的一

* 傅俊結，南台科技大學電子工程系副教授。

南台通識電子報
2015 年 5 月 15 日出版
南台科技大學通識教育中心 發行
54

些同事疏遠他，最嚴重的是他的老師 Kronecker 對他嚴格的批判，最後導致他在精神上受到嚴重的打擊，進出精神病院多次，後來他是在精神病院鬱鬱寡歡結束他的一生。

前面我們舉了一個例子，就是所有自然數的個數還有偶數的個數的比較，以嚴格的邏輯眼光來看，他們是一樣多的，因為我們可以在所有的自然數和所有的偶數之間建立起一對一的對應，例如 1 對應到 2，2 對應到 4，3 對應到 6…也就是說，我們如果能在兩個集合之間建立起一對一的對應關係，我們就說這兩個集合的元素的個數大小是一樣的，即使是他們都是有無窮多個。這個概念當康托爾第一次提出來時就遭遇到很多學術界的同事的嚴格抨擊，認為康托爾已經走火入魔了，甚至當康托爾第一次證明自然數的個數和有理數的個數在數量上也是一樣的，更是震驚了學術界，因為有理數有所謂的稠密性但自然數沒有。就是說任何兩個有理數之間存在有理數，但是任何兩個自然數之間並不一定存在自然數，像 2 和 3 之間就沒有自然數。

我們可以舉一個日常生活的例子來比較無窮大，比如說：佛陀的偉大還有菩薩的偉大，如果我們把它們的偉大程度量化，我們可以說他們的偉大程度都是無限大，但是直覺上我們會認為佛陀的偉大還是比菩薩的偉大大，雖然說他們的偉大都是無限大，也就是說無窮大這種量還是可以比較的。而對這種無限大的比較，康托爾是第一個從事這方面這方面深入研究的數學家，那在數學上有沒有兩個無窮大可以互相比較大小呢？康托爾就證明了所有 0 到 1 之間的所有實數的個數是比所有的自然數的個數還多，也就是說他們之間不存在一對一的對應關係，這個發現在當時可以說對數學界是一個很大的 surprise。

最後，我們提一個有關無窮大的問題，至今還沒有完全解決，也可以說是有關無窮大最有名的一個問題，是康托爾自己提出來的，就是所謂的連續統假說。這個問題是說有沒有一種量，它是無窮大，但界於所有實數的個數還有所有自然數的個數之間，這個問題被認為是邏輯上最重要的問題。但是有些數學家認為自從 Godel 和 Paul Cohen 他們的工作之後，這個問題已經解決了，而有些數學家，認為這個連續統假說還沒有完全得到徹底的解決。總之，這個連續統假說的問題，到底有沒有被解決，連數學家都有不同的看法，可見人類對無窮大的問題，還真的是有待進一步的努力。