



數

● 傅俊結*

實在很難想像，人類到底是從什麼時候開始會數一數的，到底是在什麼動機、什麼情況之下。也許有一天，他們發現有必要來算一算某種東西的個數吧！為了這個需要，人類發明了自然數。就是從 1、2、3、4...一直下去，永遠數不盡的這些數。這些數的命名也蠻有趣的，因為他們真的太自然了。自然數也是我們從小開始會算的數，當我們一出生下來，開始會說話的時候，父母親就會教我們數 1、2、3、4...了。從一個人、兩隻狗、三隻貓，可以說自然數出現在我們的日常生活上，是再自然不過了。即使以前農業時代，很多人沒錢進學校讀書，長大了以後，他們也會自然數。

有關自然數，我覺得很有趣的一個故事，是有關高斯的。高斯在他差不多十歲的時候，有一天可能因為調皮搗蛋，不曉得是他的老師還是他爸爸就叫他去算 $1+2+3+4+\dots+100$ 等於多少？本來想說可以讓高斯安靜一陣子，沒想到他在幾秒鐘之內，就用一種挺漂亮的方法得到 5050 標準答案。這個例子，給了現在的家長，一種測驗你的小孩子是不是在科學數理方面，是否有足夠天份的測驗方法。當你的小孩子在念小學時，正在學習有關自然數的加法，你想知道小孩夠不夠聰明，就可以用這個方法考考他。相信大部分的小孩都會一個數一個數的慢慢加，這時候請家長也不要氣餒。至少你的小孩子還很聽你的話。

時間一分一秒的過去，人類終於發現自然數是不夠用的。在日常生活中，當我們什麼都沒有，兩手空空，身無分文時。你的財產是多少？也許 0 就是這樣發明的。當

* 傅俊結，南台科技大學電子工程系副教授。



你負債時呢？你的財產又是多少？也許負數又是這樣被發明的。有了負數和 0 之後，人類就可以做減法了。自然數、0、和負的自然數，這些數就是我們現在的整數。因此自然數的另一個專業術語就是所謂的正整數。

時間還是一分一秒的過去，人類的文明也一直往前走。終有那麼一天，有個人發現整數不夠用。這個人不是什麼天才，就是像我們一樣的普通人。當你要把家中的西瓜切一半，分給你的朋友吃時，你會跟他講，一人一半，感情卡不散。但是你突然想到一半是什麼意思呢？它不是自然數啊！於是你發現在 0 和 1 之間還有數隱藏在哪裡，而且有很多很多。就這樣出現了分數。以數學家的專業術語來講，他們把分數稱為有理數。有了有理數，我們就可以做自然數的加減乘除了。可見有理數的發現，在人類的實際生活層面上，有著非常大的影響。我們可以認真的思考一下，在我們每天的日常生活裡，有理數的使用，事實上也就夠了。有理數和整數有一個重大的差別，就是有理數有稠密性，這是整數所沒有的。這裡稠密性的意思就是，任給兩個有理數，在它們之間一定還有有理數。但是整數就沒有這樣的特性，例如，2 和 3 之間就沒有整數了。

時間依然是一分一秒的過去，人類的文明似乎沒有要停下來的意思。這時的人類，吃飽喝足，開始會胡思亂想。有一批人不再只是飽暖思淫慾，成天想著異性或同性青春的肉體。他們開始在精神層面上要做自我的提昇。他們不再滿足於有理數的世界，雖然，很多年的很多年來，人類在有理數的使用于生活上，也沒有不便利的地方。在某個時間點上的某一個人，叫做畢達哥拉斯的，他發現一個直角三角形的兩個邊如果長度是 1 的話，他的斜邊的長度竟然不是有理數。這怎麼辦？這實在沒有道理。好吧！那就把它叫做無理數。真是沒有理性的一些數。可是它也實際出現在我們的四周圍。不信的話，當你一個圓的周長去除以這個圓的直徑，你會發現永遠除不盡，因為它是無理數。這些無理數和有理數之間有一個很大的不同，就是，它們是不可數的。而有理數是可以數的。這麼數？當然是用爸媽教我們的自然數來數。有理數，你可以 1、2、3、4...一個、一個這樣一直數下去，無窮無盡，天荒地老，只要你的生命夠長。無理數不行了。也許發明怎麼數無理數是人類的一個重大挑戰。不管怎樣，事實上，我們真的可以不用去理這些沒有理性的數，也可以好好地生活下去。因為生活上





並不需要！請問你有在超市看過標價 $\sqrt{2}$ 元的東西嗎？將來，如果有一個國家的中央銀行，發行面值無理數的硬幣或是紙鈔時，我們只能無言。因為會天下大亂。所有的自然數、整數、有理數、無理數，這些數以近代文明的術語，就是所謂的實數。而要把實數的基礎打穩，也是到了 19 世紀末期才完成的。實數之後呢？還會有新的數嗎？真的是有。一種虛無縹緲的數。

時間，時間之神啊！您真的還要讓它一分一秒的過去嗎？不能休息一下嗎？您的一個子民，叫做愛因斯坦的，居然挑戰您的權威。他說他可以讓您慢下來，前提是要有很多錢，可以買一架，不是超跑，而是超飛，可以飛很快的太空船。坐上去，油門踩到底，加足馬力，讓超飛以接近光速的速度飛行，而且愈接近光速，您就慢的愈明顯。可是我沒有很多錢，也不想時間慢下來，您能不能讓時間，不是一分一秒，而是一月一年的過去，帶我走，去找我爸媽。我好想好想他們，他們。

