南台通識電子報
2016年7月15日出版
南台科技大學通識教育中心 發行
63

科普新知

黎曼假說

● 傳俊結*

在自然數 1，2，3，...中，有一群很特殊的數，就是只能被 1 和自己本身整除的數，稱為質數，例如: 2，3，5，7，11，13，...。質數可以說是自然數的原子，因為所有的自然數均可用質數來表示，這是所謂的算術基本原理。就如同科學家所講的，宇宙萬物皆由原子所構成。質數的個數有無窮多個，這是兩千多年前的歐幾里得就曉得的結果。雖然質數的個數有無窮多個，但是以所有的自然數來說，數學家認為質數的個數是稀疏的。數學家的思考真不是我們常人所能理解的，無窮多的數目居然還稱稀疏，天啊。這篇文章想要談一談有關質數的一個最有名的，最重要的問題，對這個問題的解答，可以說是人類想對質數有更進一步的了解的話，首先必須完成的工作。這個問題叫做黎曼假說。

黎曼假說不只在質數的研究方面，甚至在整個數學界，可以說是名氣最大，而且最重要的問題，沒有之一。黎曼是德國數學家，39 歲就死掉了，我們大一所學的微積分的積分方面，就是黎曼所定義的。在黎曼所有的論文中，只有一篇是探討解析數論的問題，這篇論文只有八頁長。但是，以現在數學家的眼光來看，這篇八頁短文可以說是解析數論發展史上，一篇可以稱為里程碑的文獻。黎曼假說就是在這篇文章中提出來的，原文是德文書寫的，但是由於它的重要性，網路上都可以找得到這篇文章的英文翻譯版本。在這篇文章中，黎曼問了一個看起來很平凡的問題，就是任給一個數，以 x 表示，x 不一定要是自然數，那麼小於x 數有幾個呢？這個問題，很明顯不可

* 傳俊結，南台科技大學電子工程系副教授。

能有一個精確的數學函數的表達式的解答，黎曼也知道這一點，他只想要有一個這個質數個數的漸近行為，也就是說當x 趨近於無窮大時，質數的個數是怎樣的趨近於無窮大？黎曼的老師高斯，有一個這個質數個數的猜測，就是它的漸近行為應該是$\frac{x}{\ln x}$。為了研究這個問題，黎曼引進了一個函數，現在這個函數被稱為黎曼ζ 函數。它是用一個無窮級數來定義，$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$。這個函數的一個特殊情形，在較早之前就被瑞士數學家 Euler 研究過，Euler 利用這個函數證明了質數有無窮多個，他的證明是一種解析的直接證明，不像兩千多年前的歐幾里得，用的方法是算術基本定理和反證法的間接證明。也因為 Euler 的這一證明，數論裡頭的一門新學問，解析數論，從此誕生。

雖然 Euler 和黎曼考慮的函數，它的數學表達式是同一個無窮級數，但是 Euler 考慮的情形是，限制自變數s 的定義範圍是實數，而黎曼厲害的地方，就是把自變數s 的定義推廣到複變數，也因此可以得到更豐富的結果。從大一微積分所學到的無窮級數的收斂發散判斷方法，很容易可以得到當複變數s 的實部大於一時，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$是收斂的。因此$\zeta(s)$就有定義。但是當$s$ 的實部≤一時，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$是發散的。雖然如此，黎曼可以用複變分析上的解析拓延的方法，把$\zeta(s)$的定義推廣到整個複數平面上，除了$s=1$ 之外，而得到一個解析函數。由解析拓延所得到的這個解析函數，它的零點分成兩類。一類是所謂平凡的零點，即$s=-2,-4,-6,\ldots$.這些負的偶數，這些平凡的零點，在研究上沒有什麼意義。另一類稱為非平凡的零點。可以證明，這些非平凡的零點，它的實部都大於零，小於一。黎曼假說就是說，事實上，這些非平凡的零點的實部都等於二分之一。黎曼在提了這個猜測之後，也試著證明它。但是，好像沒有什麼簡單的方法可以很快地得到證明。而且在他的這篇論文中，黎曼並不需要這個結果，因此也就擱置下來。即使要證明零點的實部不會等於一，也不是一件簡單的工作，這個工作在黎曼死後 30 年，也就是 1896 年，才由兩位法國的數學家 Hadamard 和 Vallee-Poussin 獨立

證明。而這兩位法國數學家所得到的結果，就等效於前面我們所提到的質數個數的漸近行為。想要對這個漸近行為有更精確的了解，必須把ζ 函數沒有零點的區域，從實部等於一的那條直線，再往裡面推進，而最佳的結果，就是ζ 函數的零點的實部都在實部是二分之一的這條直線上。這個就是黎曼所要的猜測。事實上，黎曼的猜測並不是隨便猜的。後來有數學家在哥廷根大學的圖書館，也就是黎曼在世時所任教的大學，找到他的手稿，發現黎曼有計算了幾個ζ 函數的零點，而它們的實部真的都是二分之一。也許黎曼就是根據他的計算結果而提出他的假說。

黎曼假說從提出到現在也將近 160 年的時間，現在這個問題已經被克雷研究所指定的價值百萬美金的七個問題之一，這 160 年來三不五時就有人宣稱他已經證明了黎曼假說，後者否決了黎曼假說。這類的文章，在網路發達的今天，到處都是。有一種網路謠言聽起來蠻恐怖的，就是黎曼假說的解答是要以生命當代價的。也就是說，事實上黎曼假說已經被證明了，但是證明的人也馬上死了。即使不以生命當代價，要解決黎曼假說的人，也會因為心智的耗損，而精神分裂，最有名的例子，就是諾貝爾經濟學獎得主的納許。英國數學家哈代很怕死，有一次要從丹麥坐船回英國，當他要上船的時候，寄了一張明信片給他丹麥的朋友波爾，明信片上只寫了一行字，就是他證明了黎曼假說。為什麼哈代要這樣玩呢？就是因為他怕死。他想說如果發生船難，他死了，那數學界就真的會認為他證明了黎曼假說，但是因為他是一個無神論者，他不相信上帝會把證明黎曼假說的榮譽給他，因此也就不會發生船難。真是幽默。

最後，我們談一談有關黎曼假說的一些重要結果。1914 年英國數學家哈代證明了在實部等於二分之一的這條直線上，真的有無窮多個ζ 函數的零點。但是哈代沒辦法證明所有的零點都在這條直線上。接著就是 1942 年，挪威數學家 Selberg 證明所有的非平凡的零點，有一個正的比例都在這條直線上。1974 年，美國數學家 Levinson 把這個正的比例量化，就是 34%。Levinson 證明這個結果非常不簡單，因為他那時已經六十幾歲，以數學家來講，根本就是退休的年紀，他發表了這個結果之後，隔年就死掉了。這個 34%的結果後來被改進，目前為止最好的結果大約是 40%，這是美國數學家 Corney 的工作。隨著電腦科技的進步，有電腦科學家和數學家合作，寫程式去計算非平凡零點，他們發現前面幾十億個零點，真的都在實部等於二分之一這條直線上。即

南台通識電子報
2016 年 7 月 15 日出版
南台科技大學通識教育中心 發行
63

使有電腦的幫助，距離黎曼假說的完整證明還是有一大段距離。後來物理學家發現，黎曼的ζ 函數不只出現在數學上，在物理上也隨處可見，因此就有人想用物理的方法來證明黎曼假說。甚至有一些大牌的數學家認為，黎曼假說的證明可能會由物理學家來完成。