



哥德巴赫猜想

● 傅俊結*

哥德巴赫猜想是數學上，有一門專業的領域叫數論，裡面的一個猜想。這個猜想，想當然，是一個叫哥德巴赫的數學家提出來的。哥德巴赫是 18 世紀普魯世的一個數學家，但是他在三十幾歲時，就移居到俄羅斯。此後一生，他基本上應該是一個俄羅斯的數學家。他長期與歐洲一些有名的數學家，像萊布尼茲，Euler 通信，討論一些數學問題。現在，哥德巴赫在數學的名氣，看起來主要是這個猜想，而不是他的數學工作。

有一天，Euler 收到哥德巴赫寫給他的一封信，在信中，哥德巴赫提出了這樣的猜測：任何一個大於 2 的自然數都可以寫成 3 個質數的和。所謂質數，就是只能被 1 和本身整除的自然數。例如：3，5，7，11…。這個猜測以現在的數學觀點有一點出入，因為把 3 寫成 $3=1+1+1$ 。但 1 不是質數。不過，在哥德巴赫的那個年代，1 被認定是質數。但是，現在的數學家已經不再做這個約定，現在認為最小的質數是 2。所以，以現在的數學語言來敘述的話，哥德巴赫的問題是：任何大於 5 的自然數都可以寫成三個質數的和。Euler 認為這個猜想是對的，但是他沒辦法證明。他提出了另外一個猜想：任何大於 2 的偶數都可以寫成兩個質數的和。例如： $4=2+2$ ， $8=3+5$ ， $10=3+7$ ， $20=3+17$ ， $38=7+31$ …。現在所謂的哥德巴赫猜想，一般就是指 Euler 提出的這個猜想，這個猜想也叫做強哥德巴赫猜想，或者，關於偶數的哥德巴赫猜想。Euler 雖然沒辦法證明哥德巴赫在給他的信中所提的問題，但是他可以證明，他的問題是對的話，那

* 傅俊結，南台科技大學電子工程系副教授。

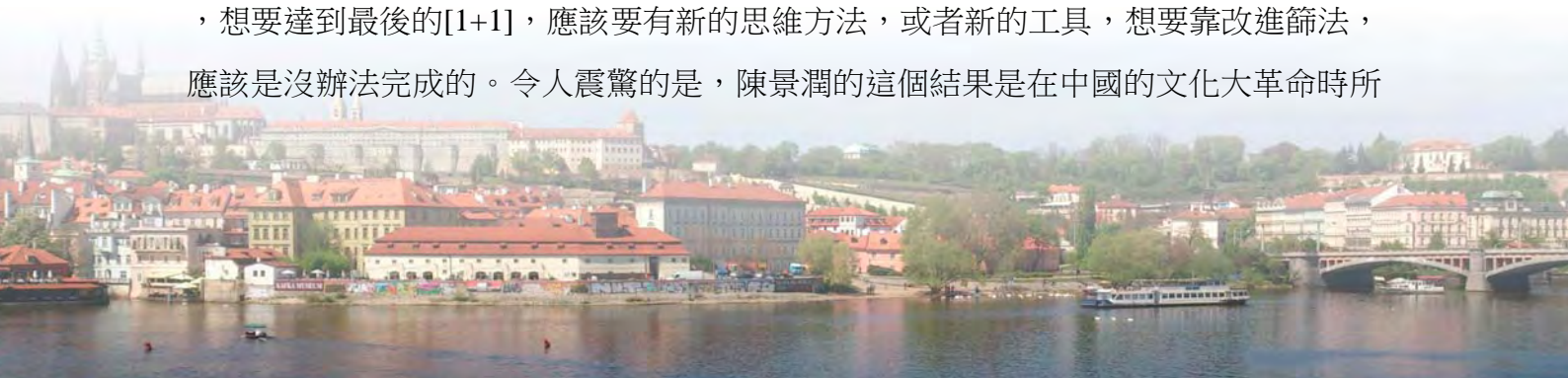




麼哥德巴赫所問的問題也是對的。有強就有弱，有偶數就有相對應的奇數，所以所謂的弱哥德巴赫猜想，或者，關於奇數的哥德巴赫猜想，可以敘述如下：任何一個大於 5 的奇數都可以寫成三個質數的和。

哥德巴赫猜想雖然很容易理解，但也許真的是太難了，自從這個猜想被提出來之後 160 多年，基本上都沒有任何進展，也許根本就沒有數學家在對它進行研究了，說不定，在這 160 多年，年輕一輩的數學家，甚至忘了這個猜想的存在。德國的著名數學家希爾伯特，在 1900 年的第二屆國際數學家大會上，發表他著名的 23 個數學問題，希爾伯特把這個哥德巴赫猜想併入他的第八個問題，也因此再度引起數學家的興趣。我們先談關奇數的哥德巴赫猜想，這個情形，基本上，數學家認為已經解決了。就是在 1937 年，蘇聯數學家維諾格拉多夫，他證明：任何充分大的奇數，都能寫成三個質數的和。雖然這個定理有一個小瑕疵，就是所謂充分大到底要多大？維諾格拉多夫的方法並沒有辦法給這個充分大的奇數一個估計值。不過這個小瑕疵，現在應該已經被解決了。2013 年祖籍秘魯的法國數學家 Helfgott 和他的合作夥伴，將這個充分大的限制條件去除了，他們宣稱完全證明了弱哥德巴赫猜想。

有關偶數的哥德巴赫猜想的第一個重要突破，是在 1919 年，一個挪威的數學家布朗證明：任何充分大的偶數，都能寫成兩個數的和，而且這兩個數的質因數的個數都不會超過 9。這是有關哥德巴赫猜想的一個里程碑。如果可以把 9 改進到 1，那就證明了哥德巴赫猜想。引進一個符號，如果把布朗的定理寫作 $[9+9]$ ，那哥德巴赫猜想就是 $[1+1]$ 。布朗的工作之後，1924 年，Rademacher 完成了 $[7+7]$ 。1932 年，埃斯特曼證明了 $[6+6]$ 。接下來有數學家證明了 $[5+5]$ ， $[4+4]$ ， $[3+3]$ ， $[2+3]$ 。到目前為止，都還沒有數學家能夠證明這兩個數中一定有一個是質數。一直到 1962 年，中國數學家潘承洞證明 $[1+5]$ ，接下來當然就有 $[1+4]$ ， $[1+3]$ 。目前為止，有關歌德巴赫猜想，嚴格講，應該是有關偶數的歌德巴赫猜想，的最好結果是中國大陸數學家陳景潤所做的 $[1+2]$ 。以上的所有這些結果，包括陳景潤所完成的工作，所用的方法，基本上都是數論上所謂的篩法，數學家普遍認為，這個方法，到陳景潤的工作為止，基本上已經發揮到極致了，想要達到最後的 $[1+1]$ ，應該要有新的思維方法，或者新的工具，想要靠改進篩法，應該是沒辦法完成的。令人震驚的是，陳景潤的這個結果是在中國的文化大革命時所



完成的，在這段十年文革的黑暗時期，絕大部分的知識分子被下放到農村進行勞改，陳景潤也是其中之一。在這樣的環境中，日子可以過得下去，可以保住生命，基本上，就是最大的滿足了。但是，陳景潤居然可以利用好不容易擠出來的一點點時間，對這個世界難題做出最偉大的貢獻。當時的中國共產黨也逮住了這個機會，對世界進行了徹底的廣告宣傳，讚揚共產主義社會的美好。陳景潤也因此成為了人民英雄，而歌德巴赫猜想也成為了中國社會的一門顯學。接下來，無以數計的中國老百姓，有博士的，有小學畢業的，有學術界的，甚至連擺地攤的，種田的，都上場了。這些人都想證明 $[1+1]$ ，好給歌德巴赫猜想來個最後總結。北京的中國科學院每年都會收到好幾個麻袋的數學論文，這些論文的作者，都宣稱他們已經完成歌德巴赫猜想的證明，要請科學院的教授幫他們驗證。導致中國科學院的數學教授，已經公開宣稱，他們不再為這些所謂證明哥德巴赫猜想的文章做驗證。事實上，數學界普遍性認定，雖然歌德巴赫猜想是一個很容易理解的猜想，只要有中學的數學程度，學過質數，就知道這個問題是在問什麼。但是，想要完成這從 $[1+2]$ 到 $[1+1]$ 的最後一步，並不是我們這些販夫走卒所能做到的。即使是 2006 年菲爾茲獎的得主，美國的華裔數學家陶哲軒，他也想要證明 $[1+1]$ ，而且他也有一些很好的結果，但是他也公開承認，他的方法不可能證明 $[1+1]$ 。

