



Kekeya 猜測

● 傅俊結*

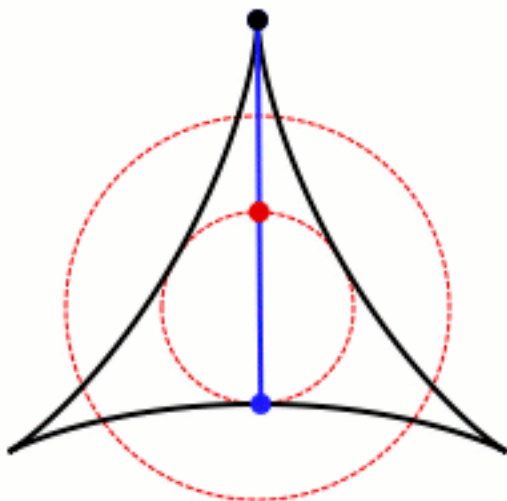
2016年，無疑地將是人類歷史上很特殊的，很有紀念性的一年。因為，川普在這一年的11月當選美國的第45任總統，美國的時代雜誌也把他選為2016年的年度風雲人物。從一開始的不被看好，被認為是出來亂的，到最後脫穎而出，贏得最後勝利。川普的故事，再一次印證了中國的古老格言，有志者事竟成，精誠所至，金石為開。而且也給這個世界上，目前遇到困境的人打了一針強心劑，最常聽到的說法就是，川普都能當選美國總統了，還有什麼是不可能的。川普和我們的文章標題 Kekeya 猜測有什麼關係呢？話說，目前華人世界裡面，最出風頭的數學家之一，美國 UCLA 的數學教授陶哲軒，在美國總統競選期間，在他有名的部落格上發表了一篇文章。陶哲軒從數學邏輯的角度來分析美國總統大選，並得到一個結論：川普不適合當美國總統，應該是一個共識。川普看到這個訊息之後，當然不爽，直接在 Twitter 上反嗆回去。他說：陶哲軒是一個失敗的分析學家，他連 Kekeya 猜測都證明不出來。想不到川普也聽過 Kekeya 猜測，難怪他會成為美國總統。因為，即使是數學專業的，也不一定聽過這個猜測。不過可以確定的是，川普不曉得 Kekeya 猜測這個問題的困難度，他應該也不曉得，陶哲軒在這個問題上，是目前世界上數一數二的專家，尤其在貢獻度方面。

回到我們的主要問題。Kekeya 是日本的一個數學家，1917年的有一天，他在上大號時，想到一個數學問題。假設有一個古代的日本武士，也像他現在這樣在上大號，突然有另外一個日本武士要攻擊他，他要拔刀應戰，那麼他揮刀旋轉一周的過程中，

* 傅俊結，南台科技大學電子工程系副教授。

所需要的最小面積是多少？以數學語言來敘述的話，就是：假設平面上有一個集合，這個集合在每一個方向上，都包含有長度為一的線段，那麼這個集合的最小面積可以是多少？這個集合現在數學家稱為 **Keakeya** 集合或 **Besicovitch** 集合。**Keakeya** 的集合有一些很明顯的答案，例如：圓，半圓，高為一的正三角形，等等。但是，這些都沒有滿足最小面積的要求，**Keakeya** 構想的答案是一個正三尖的內擺線，見附圖。這個情況

下，經過計算，面積是 $\frac{8}{3}$ 。**Keakeya** 本人以及當時的一些數學家都認為，這應該就是所要求的最小面積了。驚人的答案是一個前蘇聯的數學家 **Besicovitch** 所給的，就是 **Keakeya** 所要的集合的最小面積可以是零。**Besicovitch** 在 1919 年，問了自己一個類似的問題，就是，是否存在一個面積為零的平面集合，它在每一個方向上包含長度為一的線段？一年之後的 1920 年，**Besicovitch** 自己解決了自己提出的問題，答案是肯定的。他可以構造出這樣一個面積為零的集合，**Besicovitch** 把他的結果刊登在蘇聯很偏僻的期刊上，西方世界當然不知道 **Besicovitch** 的結果。而且這個期刊因為革命和內戰的關係，出了兩期就絕版了。1925 年 **Besicovitch** 離開蘇聯來到丹麥，在這裡他第一次聽到 **Keakeya** 的問題，他用他的方法稍微修改了一下，就可以建構出 **Keakeya** 所要的面積為零的集合。雖然說 **Besicovitch** 所構造的集合不是單連通的，但是後來的推廣，數學家已經可以在單連通集合裡面建構 **Besicovitch** 集合。



Keakeya 一開始認為他問題的最小面積，就是左圖的正三尖內擺線。

現在所謂的 **Keakeya** 猜測是指，雖然 **Keakeya** 集合或者 **Besicovitch** 集合的面積可以任意小，但是他們的 dimension，不管是 Hausdorff 的或者 Minkowski 的，都是等於二



。這個結果已經被證明了。但是，困難的是在高維的情形，只有部分結果。詳細的說，是否 n 維， $n \geq 3$ ，以上的 **Keakeya** 集合，他們的 **Hausdorff dimension** 或者 **Minkowski dimension** 也是 n ？一開始，**Keakeya** 猜測被看成與數學的其他分支並沒有什麼關聯的純粹幾何問題，可是後來的發展出乎大家意料之外，現在的數學家已經知道，**Keakeya** 的這個問題，跟傅立葉轉換的限制定理猜想，**Bochner-Riesz** 的平均猜想，甚至偏微分方程都有關係。

