連續統假說

● 傅俊結*

連續統假說是數學上，特別是集合理論上，一個很有名的問題。有關這個問題的解答，有些數學家說已經解決了，有些卻說還沒有。這個假說是在探討人類最基本的，一開始就會遇到的問題，也就是計數的問題。我們日常生活上所碰到的，都是有限的問題，而連續統假說所要處理的，是有關無限的計數問題。

從最簡單的有限問題開始，當我們要比較兩個集合裡面的元素個數，哪個比較多時，只要把兩個集合的元素個數拿來比較大小就好了。我們把它講得比較專業化的意思，也就是說，當集合 A 的所有元素和集合 B 的所有元素之間，存在一對一的對映的話，我們就說這兩個集合的元素個數是一樣多的。如果不存在這樣的一對一對映的話，那麼這兩個集合的元素個數就不一樣。這種方法不只可應用在有限的大小，也可以用在當集合的元素個數是無窮多的時候。我們舉一個例子來說明這個概念，假設集合 $A=\{1,2,3,\ldots\}$，也就是包括所有的自然數，集合 $B=\{2,4,6,\ldots\}$ ，也就是包括所有的偶數。那麼，請問這兩個集合的元素個數哪一個比較多？直覺上，集合 A 中的元素個數比集合 B 多，因為集合 A 包括所有的偶數和所有的奇數，而集合 B 只包括所有的偶數，但是這種比較方法只適用在集合的個數是有限的時候。A 和 B 這兩個集合元素的個數，很明顯的都是無窮多。無窮大並不是一個數，我們不能把它拿來像數一般，做四則運算。例如 $2\infty-\infty$，這樣的式子是沒有定義的。事實上，根據前面所講的，我們很容易可以在集合 A 和 B 之間，構造一個一對一的對映，例如，1 對映到 2，2 對映到 4，

---

* 傅俊結，南台科技大學電子工程系副教授。

3 對映到 6，…等等。因此這兩個集合的元素個數是一樣多的，用數學語言來講，集合 A 和集合 B 的基數是相等的。

基數是德國數學家康托爾所命名的，集合論是他發明的，連續統假說是他提出的，康托爾也是第一個研究無窮大這種量，要如何比較大小的問題。就因為他證明出有關無窮大的一些不可思議的結果，導致他的人生終究要以悲劇來結束。那時候，一些保守的，大牌的數學家認為，無窮大這種東西沒有什麼好研究的，以致於康托爾的研究結果，招致這些數學家無情的批評，這其中包括他的老師，這些批評導致康托爾的精神狀況出現問題。最後，康托爾在精神病院結束了他精彩的一生。

首先，我們需要一個很基本的無窮大，這個無窮大很自然地就是考慮所有自然數的個數，這個無窮大我們稱作可數的無窮大，因此所有偶數的個數，或者所有奇數的個數，等等，都是所謂可數的無窮大。也就是說，我們可以在包括所有自然數的集合，和所有偶數的集合，或者所有奇數的集合之間，構造出一個一對一的映射。那麼問題就是，有沒有存在一個集合，它的元素個數是無窮大，而且在這個集合和包括所有自然數的集合之間，不存在一個一對一的映射。數學家本來以為所有有理數的集合，會滿足這個特性，因為有理數有稠密性，而自然數沒有。可是，康托爾發明一種對角線方法證明，所有有理數的集合的個數也是可數的無窮大。康托爾的這個證明震驚了當時的數學界，後來他更證明，所有實數的個數，真的會比所有自然數的個數還大，那也就是說，你沒辦法在包括所有自然數的集合，和包括所有實數的集合之間，構造出一個一對一的映射。所有實數的個數的這種無窮大，就被稱為不可數的無窮大。

所謂的連續統假說，就在問說，在可數的無窮大和不可數的無窮大之間，是否存在某一種型式的無窮大? 康托爾自己認為，這樣的無窮大是不存在的，可是他沒辦法證明。這個問題後來被德國著名的數學家希爾伯特，在 1900 年的國際數學家大會上，所提著名的 23 個問題中，列為第一個問題，因此這個問題的名氣也更為響亮。有關這個問題，一直都沒有什麼進展，直到 1940 年，以不完備性定理揚名於世的著名邏輯學家哥德爾，他可以證明，在目前的數學基礎，集合論公理，也就是 ZFC 系統上，我們是沒辦法證明連續統假說是錯的。後來，1963 年，美國數學家柯恩更證明，沒辦法證明連續統假說是對的，也就是說，連續統假說跟數學基礎 ZFC 是獨立的。講得更通俗

一點，在人類目前的數學知識下，我們沒辦法證明連續統假說是對的，也沒辦法證明連續統假說是錯的，那這是什麼跟什麼呢? 所以，這也就是我們在第一段所講的，有些數學家認為連續統假說這個問題已經解決了，有些人認為還沒有，沒有統一的答案。目前的數學就是西方的數學，這個數學是建立在一些公理之上，這些公理是不是足夠讓人類可以發展出所有的數學，這本身就是一個問題，就像現在這樣，我們沒辦法由已知的數學公理推導出連續統假說的對或錯。也許，我們要等待新數學的誕生，或者說，數學本身的敵人就是數學自己。