科普新知

數學的美麗詩篇

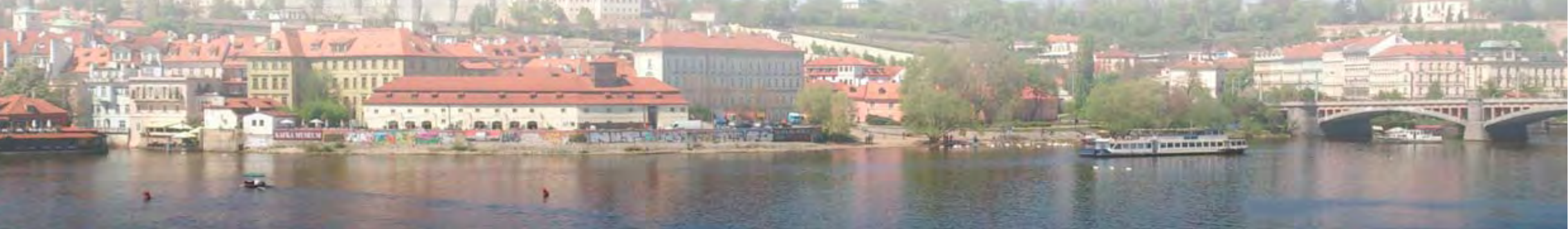
傅俊結*

數學上的什麼領域？什麼專業？可以被稱為數學的美麗詩篇，每個數學家當然有他不同的看法。不過，你如果去問 Google 叔叔，或者 Siri 阿姨，數學的美麗詩篇，一般來講，八九不離十，她們給你的答案，就是傅立葉級數。傅立葉是和拿破崙同時代的法國數學家，八歲時父母雙亡，從此成了孤兒，不過，因為傅立葉很有禮貌，就是很乖，所以，一個在做慈善事業的貴婦就把傅立葉介紹給當地教會的主教，從此傅立葉就在教會生活長大，主教並把他送到當地的一所軍事學校唸書，在軍校，傅立葉展現出他在各方面的才華，不只在數學方面，即使是文學，有時候有達官顯要來訪，校方便安排傅立葉替這些貴族朗誦詩詞。隨後，青少年該有的叛逆性格，也都在傅立葉上展現出來，暴躁，頑強等等。然後，他喜歡上了數學，在數學上找到了歸屬。

那時的法國非常的亂，法國大革命正醞釀爆發，即使如此的亂，法國近代的一些大數學家都在這個時候成長茁壯，出類拔萃。像 Laplace，Lagrange，Monge，Carnot 等等。後來就是拿破崙出來收拾殘局，拿破崙命令傅立葉去管理教育方面的事務，法國的名校，巴黎高等師範大學，從此誕生。因為傅立葉自己的學歷不過突出，所以他也在這所新成立的學校註冊唸書。

從巴黎高等師範大學畢業之後，就在軍中服務，包括在軍隊中的數學教學。傅立葉厲害的一點是，他的一些重要數學工作，是在他軍旅生涯中所完成的。他跟隨拿破崙遠征埃及時，也會找時間研究數學，做了一些數學工作，並向開羅的埃及科學院投

* 傅俊結，南台科技大學電子工程系副教授。



遞了幾篇的數學論文。傅立葉從埃及回來之後，離開了軍隊，奮鬥了幾年，進入科學院當秘書。

在科學院工作期間，傅立葉運用牛頓的冷卻定律來研究熱傳導方程，後來他的研究結果整理成書出版，書名就叫做，熱的解析理論。這本書在現代科學史的地位，佔著無比重要的角色，不管是從物理上或者數學上，都是同樣的重要。在書中，傅立葉用分離變數法可以把熱傳導方程的解明顯地表示出來，熱傳導方程是一個偏微分方程，一般來說，偏微分方程的解，很難把它用明顯的表達式來表示。但是，給定邊界條件之後，這個解卻可以用三角函數的正弦函數或者餘弦函數的無窮級數來表示。由解的性質，傅立葉更提出一個大膽的猜測：單變數的任意函數，都可以展開成正弦函數或餘弦函數的無窮級數。

現在我們已經知道，這個猜測是不對的，即使是對連續函數來說。雖然傅立葉的這個猜測，廣義來講是不對的，但是它對數學的影響是無與倫比的，這個想法造就了現在所謂調和分析或者傅立葉分析這個專業領域的誕生。波蘭裔的美籍數學家 Antoni Zygmund，在他著名的兩冊三角級數的著作中，把傅立葉分析稱作是實變函數和複變的解析函數的交界點。近代數學分析的很多觀點，都是由做調和分析的數學家所發展出來的。例如，近代的函數是 Dirichlet 在研究傅立葉級數的收斂和發散時所定義的，大一數學的 Riemann 積分及研究所實變的 Lebesgue 積分，也是當初這兩位大數學家在探討傅立葉級數時所發明的，集合論的發明人，德國數學家 Cantor，在研究三角級數的一個微妙問題時，引進了基數這個概念，也因此發明了可數的無窮大和不可數的無窮大。

接下來我們要談一點嚴格的數學。給定一個可積分的，週期為一的函數f(x)，這個函數可以是實值的，或複變值的。定義c_k為下列積分，$c_k = \int_0^1 f(x)e^{-2\pi ixk}dx$，此$c_k$一般稱為傅立葉係數，而 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi ikx}$ 就是所謂的傅立葉級數。傅立葉的雄心壯志，就是認為每一個函數都可以這樣表示，如果真的是這樣的話，那數學就太簡單了，沒什麼好玩。這裡有兩個大問題，第一，給定一個函數f(x)，這樣的傅立葉級數是不是收斂，第二個問題，即使這個無窮級數會收斂，它是不是會收斂到相對應的f(x)。在大二的高等

微積分課程中，如果授課老師會教到傅立葉級數的話，上面所提到的這兩個問題，對一些行為很好的函數是成立的，什麼叫做行為很好的函數？比如說，可以微分的函數。可是，如果函數的行為不夠好，例如只有連續性，沒有可微性，那麼這個問題就非常的困難。蘇聯數學家 Kolmogorov 可以建構一個連續函數，其傅立葉級數在每一點均發散，這個發現震驚了當時的數學界。這個古老問題最重要的，尚未解決的，就是是否存在一個連續的週期函數，它的傅立葉級數會在具有正測度的集合上發散。