



abc 猜想

● 傅俊結*

abc 猜想是數論的上一個重要的猜測，這個猜測如果成立的話，那將是數論上這幾十年來一個重要的里程碑。因為由 abc 猜想，我們可以推導出很多重要的數論上的一些已知結果，雖然說這些結果有些已經可以繞過 abc 猜想來得到證明，但是經由 abc 猜想來得到證明，應該是最直接的，乾淨俐落的。例如，有三百多年歷史的費馬最後定理可以由 abc 猜想得到，但是費馬最後定理已經在上一世紀給美國普林斯頓大學的數學家 Wiles 所證明了。數學上常有這種事情發生，有些看得比較遠的數學家會提出一些有意思的猜想，藉由這些猜想可以得到很多已知的結果，目前為止，最著名的就是黎曼假說。

abc 猜想是在 1985 年由法國數學家 Oesterle 和英國數學家 Masser 共同提出的。要理解什麼是 abc 猜想，我們得先回顧一些專有名詞，這些名詞基本上在我們讀中學時都學過了，由算數基本定理，我們知道任何一個大於 1 的自然數都可以分解成質數的乘積，所謂質數，就是除了 1 和本身之外，沒有其他的因數，我們說兩個自然數是互質的，如果他們沒有共同的因數，除了 1 之外。同理，三個互質的自然數也是一樣的定義。而所謂自然數 n 的根基，定義為 n 的所有質因數的乘積。例如 4 的根基為 2，因為 $4=2^2$ ，所以 6 的根基為 6，因為 $6=2\times 3$ 。18 的根基也是 6，因為 $18=2\times 3^2$ 。給定三個互質的自然數 a, b, c ，滿足 $a+b=c$ 。大部分的情況下，通常我們會有 c 小於 abc 的根基。例如，考慮 $2+7=9$ 。2, 7 和 9 是互質的， $2\times 7\times 9=2\times 7\times 3^2$ ，所以 $2\times 7\times 9$ 的根基是 42

* 傅俊結，南台科技大學電子工程系副教授。



，而 $c=9 < 42$ 。再舉一個例子， $16+81=97$ 。16，81 和 97 是互質的， $16=2^4$ ， $81=3^4$ ，97 是質數，所以 $16 \times 81 \times 97$ 的根基是 $2 \times 3 \times 97=582$ ，而 582 是大於 97 的。上面只是舉出兩個例子，通常的情況下， c 是小於 abc 的根基，但也是有例外的情形發生。例如： $3+125=128$ ，因 $125=5^3$ ， $128=2^7$ ，所以 $3 \times 125 \times 128$ 的根基是 $3 \times 5 \times 2=30$ ，而 30 是小於 128。這是一個不是通常的例子，而 abc 猜想就是要處理這種不是通常的例子有多少？

有關 abc 猜想的解答，到目前為止，基本上還沒有一個確切的真正答案。最有可能的答案，是日本京都大學的數學家望月新一所給出的，但是是數學界到目前為止，並沒有給望月新一的工作一個保證的背書。望月新一在 2012 年的八月，在他個人的網頁上貼了四篇論文，並宣稱他已經解決了 abc 猜想。他的這四篇文章加總起來超過 500 頁，這五六年來經過陸陸續續的修改和校正，聽說現在已經超過六百頁了。可以這麼說，大部分的數學家沒有那個時間也沒有那個能力可以審查他的工作，就像望月新一自己講的，要讀懂他的論文，數學研究所的研究生，至少需要花 10 年左右的時間，即使是學有專精的算術幾何學家，可能也要花上好幾個月的時間，對他的證明才會有所體會。望月新一在他的工作中，自己引進了一些新的符號，又自創一套新理論，他自己命名為宇宙 Teichmüller 理論。看了一下他這四篇論文，可以發現在這些文章中，是滿滿的新符號，當然一定也有新的思想，可是這種工作並不是一般的數學博士可以審查的。雖然如此，望月新一並不是一般濫竽充數的民間數學家，他在數學界有一定的地位和聲望。1969 年，他在日本東京出生，五歲時跟父母親前往紐約，16 歲時就進入美國著名的普林斯頓大學專攻數學，23 歲時就拿到數學博士，他的指導教授是菲爾茲獎的得主德國數學家 Faltings，由他的學歷看來，他並不是泛泛之輩，說他是天才亦不為過。所以，數學界還是有少數幾個蠻有名的數學家有在認真看他的論文，剛開始的時候，也的確在他的論文中找出錯誤，但是這些錯誤並不是一槍斃命的致命傷，後來也都被望月新一意修正過來了，即使如此，這些數學家到目前為止，也不敢給他打包票，認為他的證明是完全對的。從望月新一的工作發表到現在也將近 6 年了，數學界也是很奇怪，既然認為 abc 猜想是一個重要的問題，也認為望月新一並不是普通的數學家，為什麼不集中精神好好檢查他的結果呢？目前的解決方法，應該就是跟 Perelman 在 2003 年證明 Poincaré 猜測的方法是一樣的。就是在世界各地開數學研討會

，集合眾人的力量來檢查，可是望月新一本人看起來好像也不是很積極的樣子，他不會到世界各地的研討會去講給人家聽，寧願用視訊的方式跟研討會的數學家討論，就是不出日本國門。可以這麼說，如果望月新一不積極一點，離開日本去跟全世界一些偉大的數學家詳細講他的結果，那麼到最後他可能就是只有孤芳自賞，因為人類沒有義務要去審查他的結果。網路上盛傳，今天的一月，日本的數學專業期刊就要刊登望月新一那四篇論文，可是最後也是沒有。

在第一段，我們就提到為什麼 abc 猜想這麼重要，Wiles 證明費馬最後定理的文章超過百頁，如果 abc 猜想是對的，那麼證明費馬最後定理只要一頁，就是這樣。

