



無窮大

● 傅俊結*

無窮大的概念被引入人間，可說是人類文明發展史上的一個重要的轉捩點。從我們呱呱落地來到人間，隨著時間的遞增，我們開始會說話時，有一天，爸爸媽媽就會開始教我們數一數，1、2、3、4、5。這樣一直數，這些數就是所謂的自然數。這些自然數是上帝給我們的，上帝也只能給我們這些了，其他的，欠缺的，人類就要靠自己去想辦法把它補上去。我們的老祖先也很快就發現，自然數真的不夠用。比如說，當我們負債時，我們要怎麼表示我們的資產呢？當然就需要負的數，因此，就創造出了負的自然數。這些正的自然數和負的自然數以及零合起來，人類就把它叫做整數。很快的又發現整數不夠用，因為生活上真的有這個需要，比如說，我把一顆蘋果切成兩半，那每一半要怎麼稱呼呢？

於是就發明了分數，分數是業餘的講法，也就是普通老百姓的講法，職業的，把它稱作有理數。就這樣，人類生活上所需要的數，用有理數基本上已經足夠了，也就這樣平平安安的過了好幾百年。突然有一天，不曉得是哪位大師，還是哪位天才，他發現有理數也不夠用，比如說，一個等腰的直角三角形，如果它的兩個腰的長度是1，那麼它的斜邊的長度就不是一個有理數，這是可以證明的。於是，我們又需要新的數，那怎麼命名它呢？既然已經有有理數了，好吧！那就把它叫做無理數吧！所有的這些數，不管是自然數，整數，有理數，無理數，聯合起來，現在的數學家就把它叫作實數。

* 傅俊結，南台科技大學電子工程系副教授。

小時候當爸爸媽媽教我們數 1、2、3 的時候，如果爸爸媽媽很討厭，要捉弄我們，叫我們一直數下去，那到底要數到什麼時候呢？也許真的有那麼一天，某個天才被他的爸媽這樣捉弄之後，終於發現了無窮大這個概念。不管怎樣，假設無窮大已經被我們發現了，那到底什麼是無窮大呢？當然所有自然數的個數就是無窮大。我們知道自然數包括偶數和奇數，偶數就是 2、4、6、8、10... 這樣一直數下去，奇數就是 1、3、5、7、9... 這樣一直數下去，很顯然的，偶數一直數下去也是無窮無盡，所以，所有偶數的個數也是無窮大。直覺上，偶數的個數只是自然數的個數的一半，因為沒有包括奇數，那是不是偶數的個數的這種無窮大，只是自然數的個數的這種無窮大的一半，好像有點道理。這是要比較無窮大的大小問題，但是無窮大就是無窮大了，這要怎麼比較大小呢？無窮大這個概念出現之前，人類能比較大小的問題，都是有限的量，無窮大並不是一個數，我們不能說兩倍的無窮大減掉無窮大等於一個無窮大，或者無窮大減掉無窮大等於零，

直覺上的對，在嚴格的數學邏輯檢驗時，有時候是會出問題的。所以要比較無窮大的大小的問題，應該需要一個曠世奇才，來提出新的看法，以了解無窮大的真本質。這個曠世奇才就是十九世紀的德國數學家康托。

康托是第一個把有關無窮大徹底研究的數學家，研究到最後，可能精神耗損太大了，再加上他的一個老師 **Kronecker** 徹底反對他的理論，並公開的抨擊他，導致他心力憔悴，最後死在精神病院，真是悲哀。康托把無窮大分成兩種，一種是可數的無窮大，另外一種是不可數的無窮大。今天如果有一個集合，它的元素個數是可數的無窮大，意思也就是說，這個集合的所有元素可以和所有的自然數，有一個一對一的對應關係。直覺上來講，就是如果你的生命夠長，你真的可以把一個有可數的無窮大的元素個數的集合，一個一個的，就像我們小時候在數 12345 這樣的數下去。所以，上一段我們談到的偶數的個數，就是一種可數的無窮大。也就是說，所有的偶數和所有的自然數之間，它們會有一個一對一的對應關係。康托在研究這種無窮大之間的比較關係，最震驚當時數學界的是，康托發明了一種方法，後來被叫做對角線法，來證明所有的有理數個數，也是可數的無窮大。這有什麼好震驚的呢？我們要知道，有理數有一個很重要的性質，是整數，自然數，偶數，奇數所沒有的，就是所謂的稠密性。有



理數的這個稠密性，直覺上會讓我們認為，有理數的這種無窮大，真的應該會比自然數的這種可數的無窮大還大啊？可是，事實勝於雄辯，邏輯戰勝理性，康託的對角線法，真的就是證明給你看，所有的有理數和所有的自然數之間有一個一對一的對應關係。那有沒有什麼是真正的不可數的無窮大呢？康托跟我們說，有的。所有實數的個數就是不可數的無窮大。康托用邏輯上的反證法來證明這件事，也就是說，假如所有實數的個數是可數的無窮大，那麼我們會得到一個矛盾的結果。因此，我們的假設是不對的，也就證明了，所有實數的個數是不可數的無窮大。康托的這些有關無窮大量的研究，以當時的數學水平，可能有些學術界的同行沒辦法接受他這麼先進的理念，不過也有一些著名的數學家是站在康托這一邊的。

康托有關無窮大的研究，留下了一個他自己提出的問題，這個問題叫做連續統假說。這個問題是希爾伯特在巴黎的國際數學家大會，所提出的 23 個著名問題中的第一個題目。這個問題可以簡單的這樣敘述，我們已經有了自然數的個數是可數的無窮大，我們也有所有實數的個數是不可數的無窮大，連續統假說，就是在問，在這個可數的無窮大和不可數的無窮大之間，有沒有另類的無窮大，康托是認為沒有，但是他沒辦法證明。於是這個問題就流傳了下來。這個問題有些數學家已經認為解決了，但有些是認為還沒有解決。主要就是兩個人的工作，一個叫做 Godel，另一個叫做 Cohen。他們兩個人的工作，基本上是，一個證明連續統假說沒辦法證明是真的，另外一個是證明，連續統假說沒辦法證明是錯的。這什麼跟什麼啊？相信大家都搞混了，不過這是真的。事實上，數學有一些問題，是沒辦法證明對或錯的，尤其在數理邏輯上，有很多這樣的問題。數學的基礎，是建立在 ZFC 這個集合理論上，連續統假說就是在這個集合理論上，沒辦法去判斷它的真假。這是目前數學界對連續統假說的最後解答。所以，連續統假說到底有沒有被解決了，可以說是各說各話，各自表述。也許數學的基礎需要重新建立吧，或者說，也許人類真的不是萬物之靈，再怎麼樣的努力，也逃不出上帝的手掌心。有些事情真的不是人類可以解決的。

