



## 向 Stein 和 Bourgain 致敬

### ● 傅俊結\*

上個月，也就是 2018 年的 12 月，對數學界來說，應該是蠻悲傷，蠻不幸的一個月。因為在那個月，近代的兩位數學大師，Stein 和 Bourgain 相繼過世了。Bourgain 經過三年與癌症的鬥爭，終於還是敵不過死神的召喚，就這樣走了。2018 年的 12 月 22 號，他在比利時的老家與世長辭，享年才 64 歲。可以說是英年早逝。雖然他長期在美國的普林斯頓高等研究院工作，不過最後還是落葉歸根了。才相隔一天，12 月 23 號，在普林斯頓大學數學系服務超過半世紀的 Stein 也走了，死因也是癌症。不夠 Stein 活到了 87 歲，說真的，也是夠了。癌症似乎真的是人類的天敵啊！

Bourgain 1954 年出生於比利時，他整個的大學教育，一直到博士階段，都在比利時完成，1977 年從布魯塞爾大學得到博士學位。1994 年，因為在很多數學分析領域的傑出研究工作，包括：Banach space 的幾何、高維空間的凸性、調和分析、遍歷理論、以及數學物理上的非線性偏微分方程等等，而獲頒有數學界諾貝爾獎之稱的費爾茲獎。

1994 年 Bourgain 剛好 40 歲，再過一年，他就沒有獲獎的資格了，因為費爾茲獎規定獲獎時，必須不大於 40 歲。也是在這一年，Bourgain 被美國普林斯頓高等研究院聘為終身教授，研究院的數學類終身教授只有八個名額，從此他就常駐美國。Bourgain

\* 傅俊結，南台科技大學電子工程系副教授。



最令人讚嘆和佩服的地方，就是在四年前被確診罹癌之後，他並沒有從此灰心喪志，等待死亡，他反而在數學的研究上，爆發出無與倫比的創造力，在分析、組合學、偏微分方程、高維幾何和數論上，寫了很多非常傑出的論文，因而獲得價值三百萬美金的 2017 年的數學突破獎。

Stein 1931 年在美國出生，是調和分析領域的大師級領導人物。

Stein 師承 Zygmund，而 Zygmund 可說是近代調和分析的代表性人物，他所寫的兩冊三角級數的專業著作，是調和分析的聖經，每個唸調和分析的學生，即使沒把這兩本書好好研讀，應該書架上也要有這兩本書，以便隨時查看，而他和 Calderon 所發展的 Singular integral operator theory 對現代的數學分析是一極其重要的工具。

Stein 1955 年從芝加哥大學獲得博士學位之後，先到麻省理工學院任教，三年之後，再回到芝加哥大學擔任助理教授，1963 年被普林斯頓大學挖角到數學系擔任正教授，就這樣，他在普林斯頓大學數學系任教超過半世紀，直到生命終了。

除了在數學上的傑出研究工作之外，Stein 培養了很多的數學家，而他的這些學生又培養了很多的數學家，也就是他有很多的徒子徒孫目前在世界各地擔負起數學的傳承工作，他還有兩個學生獲得了費爾茲獎。此外，Stein 也寫了很多暢銷的數學教科書，被世界各地的數學系學生認真地研讀中。

跟 Bourgain 一樣，即使到了 80 幾歲，Stein 也是在數學的研究上仍然非常的活躍，最近這幾年，他跟其他的數學家合作至少完成了六篇的論文，這其中也有跟 Bourgain 的合作。

調和分析是這幾十年來，分析上最熱門的研究課題之一，也是 Stein 和 Bourgain 的專長，這個領域的數學家，希望把自從 Fourier 以來，透過解熱傳導方程，所發展的解析方法發揚光大，用以克服不止分析上的問題，還可以處理偏微分方程或者數論或者離散上的組合學的未解問題。這其中比較著名的是 *Keakeya conjecture* 和 *Restriction conjecture*。





Takeya 是日本的一個數學家，據說有一次他在上大號的時候，也許他的廁所的空間太小，於是他心血來潮，把自己想成是古代的一位背著武士刀的日本武士，這時如果有一個他的敵人打開了廁所的門，想要攻擊他，那麼他必須有一個最小的空間，好讓他有空間可以拔出他背後的武士刀來迎戰，如果廁所的空間太狹小，那麼他的武士刀根本就拔不出來只有等死的份。

Takeya 的問題轉成數學語言的話，就是在問，以二維空間來說，在平面上，包含每個方向的單位線段的最小面積是多少呢？例如，這個面積可以是半徑二分之一的圓，或者，在三度空間上，可以是一個半徑二分之一的球，但是，有沒有一個最小的面積呢？

後來，一個蘇聯的數學家叫 Besicovitch 的，他震驚了當時的數學界，他可以構造出一個平面上的集合，這樣的集合他的測度是零，但是它卻滿足 Takeya 所要求的假設。後人把這種很特殊的集合叫 Takeya 集合或者 Besicovitch 集合。

Takeya conjecture 是說，在  $n$  維空間，雖然 Besicovitch 集合的測度可以是零，但是它的 Hausdorff dimension 還是  $n$ 。這個猜測在  $n=2$  時，已經被證明是對的，但是，在三維以上，仍然還得不到滿意的答案，雖然已經有部分的結果，提供了一些證據顯示 Takeya 猜測是對的。這些部分的結果，Bourgain 就貢獻了大部分。

Restriction conjecture 所談的，我們如果用非數學專業的專有名詞來講的話，可以這麼解釋。很多的人事物經過某種轉換之後，就跟原來的不一樣了，所謂的人事全非，這種轉換，以生活上來說，比如說，可以是結婚，離婚，交了男女朋友了，出國了…等等。轉換之後，如果想回到轉換之前，基本上，套句流行語，就是回不去了。也就是說想要回到從前，一模一樣，事實上是不可能了，或許也沒有意義了。

這個 Restriction conjecture 所談的轉換就是所謂的 Fourier transform。Stein 首先發現，還是回得去，但是必須有所限制，尤其在二維的情形，而且 Stein 給了一個最 sharp 的結果，跟前面的 Takeya conjecture 一樣，只有二維的情形，我們有滿意的結果





，三維空間以上，就是所謂的 *Restriction conjecture*。這兩個猜測看起來好像沒什麼關聯，但是 *Bourgain* 把它們的關係聯繫起來，而且把為了證明這兩個猜測所得到的結果，成功的應用在數論上和偏微分方程的一些未解問題。

