



Langlands Program

● 傅俊結*

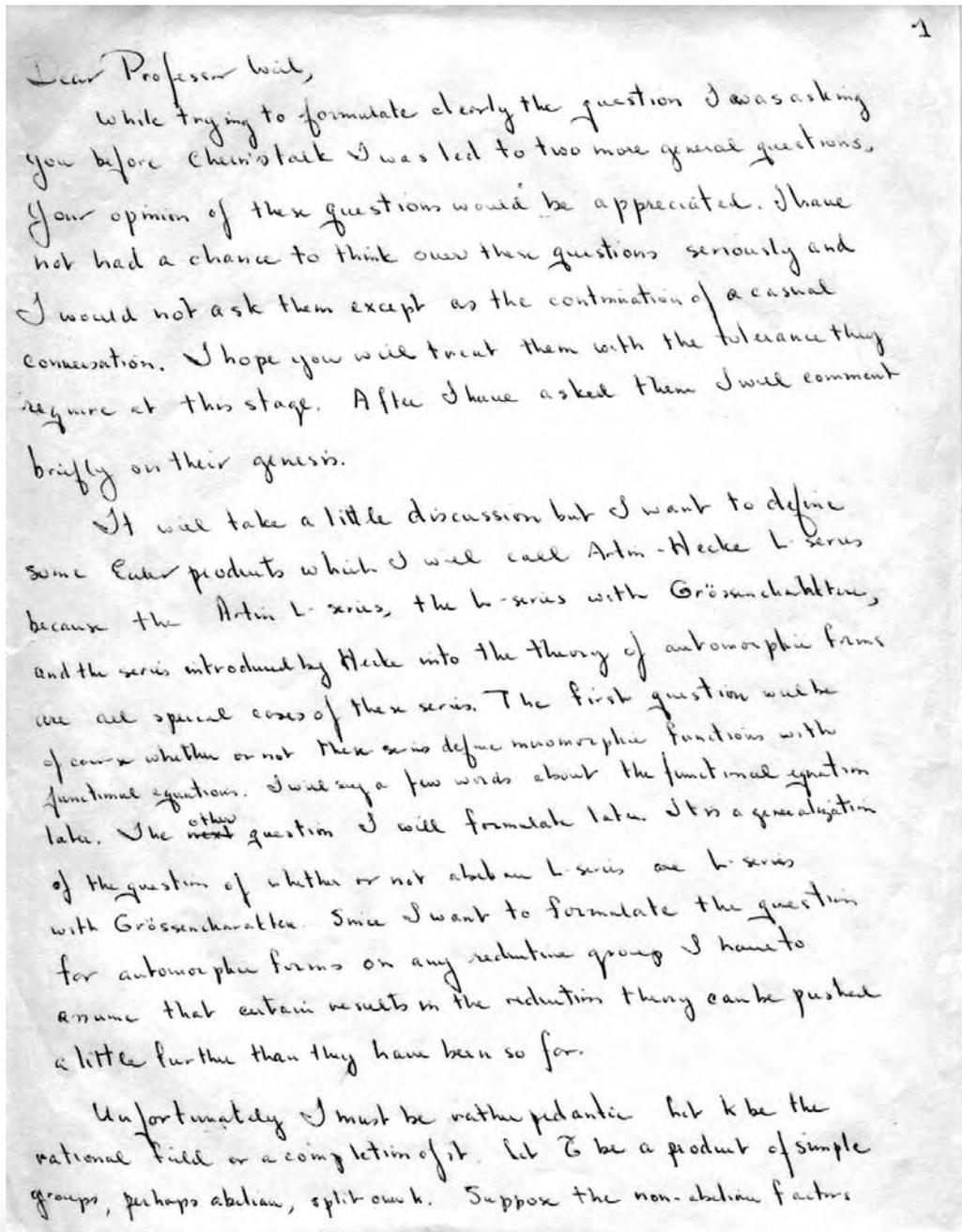
Langlands program 是一個大計畫，可以說是數學界的一個統一理論，它的角色就類似理論物理界的統一場論。理論物理的統一場論，目的是要統一自然界的四個基本作用力，萬有引力、電磁力、強作用力以及弱作用力。目前為止，理論物理學家已經發展出一套可以統一電磁力和弱作用力的電弱理論，而且也得到實驗的認可。而把電弱理論再加上強作用力的所謂大一統理論，目前也是理論具備完成，只欠東風，就是實驗的證明，而這種實驗，事實上就是錢砸出來的。因為這種實驗，不再只是像讀大學時，在那種普通物理的實驗室做做實驗而已，它需要強大的加速器，很多很多的錢，以及數以千計，甚至數以萬計的科學家和工程師來做實驗。所以這種實驗沒有一個國家可以獨立去完成，需要好幾個國家的合作，投資大量的納稅人的錢，有時候甚至只是為了找一個基本粒子而已。這是近代科學和數學的一個重大差別，數學的研究，不管是什麼大研究，基本上不需要什麼經費，所需要的只是心智上的一種運作。可以說，近代的科學是有錢人家玩的遊戲，而貧窮人家呢？玩玩數學是可以的。

Langlands Program 起源於大約 50 年前一個加拿大數學家 Langlands 的一封信，那時候的 Langlands 只是數學界的一個小老弟，才 30 出頭，不像現在，Langlands 也算是數學界的大老了。他今年已經 83 歲了，去年獲頒 2018 年的阿貝爾獎，得獎的原因，主要當然就是因為他提的這個 Program，而且他在這個 Program 上面，也做了很多傑出的工作。阿貝爾獎就跟費爾茲獎一樣，也有人把它稱作數學界的諾貝爾獎，不過阿貝爾獎有給一些數學家比較多的希望，因為它並沒有年齡的限制，而且每年頒發一次，

* 傅俊結，南台科技大學電子工程系副教授。



不像費爾茲獎，4年才頒發一次，而且年齡要限制在40歲之前。阿貝爾獎是挪威政府自己設立的，為了紀念他們的國寶，挪威數學家阿貝爾的200週年生日，在2002年成立了這個獎項，這個獎項和費爾茲獎又有一個重大的差別，它主要的頒發對象，都是在數學界已經垂垂老矣的老人家，也就是，阿貝爾獎基本上就是看你這一生對數學的貢獻，對老人家的一個尊重和敬意，而費爾茲獎就是看數學家年少時如何輕狂。



Langlands Program 的開始。這是 Langlands 寫給 Weil 的信的第一頁，從此數學的很多領域要開始邁向大一統。

Langlands 五十幾年前的那封信是寄給了 Weil，Weil 是當時數學界在代數幾何和數論方面的大老、權威之一。在信中，Langlands 提出了一系列的猜測，這些猜想如果被證實的話，就可以把數學中，一些初看起來不相關的領域，例如，數論、調和分析、群表現論，等等，把它們聯繫起來。因為這些猜測的證實，所導致的最後結果，實在是太前衛，野心太大了。所以 Langlands 也在信中謙虛的說，如果您認為這些猜測是在鬼扯的話，就可以把信直接丟了。不過這封 17 頁長的信被保留了下來，相信百年之後，它將是數學界重要的歷史文件。Langlands Program 起源於 Langlands 的一個細心的觀察，在大學的初等數論的教科書中，大部分都會提到高斯的互反定律，這個定理探討質數中一個有趣的現象。在高斯之前，數學家已經發現，可以用兩個整數的平方和來表示的質數，當它被 4 除時，餘數為 1。高斯把這個結果推廣到，用一個次數不大於 2 的模方程式來表示，並證明這個方程式有解，而 Langlands 就是從高斯的這個工作出發，把模方程的次數推廣到三次及四次，進而提出一系列的猜想，企圖用調和分析，群表現理論的工具，來解決數論的問題。

Langlands Program 對這三四十年來數學的發展，所產生的影響是巨大的。雖然 Langlands 本人證明了這些猜想的一部分，但是整個 Langlands Program 還沒有完全得到證明。自從這個 Program 提出以來，已經有三位數學家因為在這方面的工作而得到費爾茲獎。首先是 1990 年，烏克蘭數學家 Drinfeld 因為在幾何性的 Langlands Program 和量子群上的工作而得獎。接下來是法國數學家 Lafforgue 證明了 function field 型式的 Langlands Program，獲頒 2002 年的費爾茲獎。最重要的是越南數學家吳寶珠證明了 Langlands Program 的基本引理 (Fundamental Lemma)，吳寶珠的這個工作，甚至被美國時代雜誌選為 2009 年，當年度的十大科學發現之一。也因此 2010 年的費爾茲獎，吳寶珠是理所當然的得獎人之一。相信 Langlands 所提的那一系列猜測，早晚是要被人類的心智所征服的。

