



阿貝爾和伽羅瓦

● 傅俊結*

這篇文章我們要介紹兩個運氣很背的數學家，分別是阿貝爾(Abel)和伽羅瓦(Galois)。之所以說他們運氣很背，是因為，他們兩個雖然做了很好的數學工作，但是在他們生命結束之前，並沒有享受到因為他們的工作，這個人世間應該給他們的榮華富貴。懷才不遇和英年早逝可說是他們兩個的共同寫照。

我們從國小升上國中之後，所背的第一個重要的數學公式，這裡的所謂重要，就是將來的數學課業會一直，會三不五時用到，永遠不要忘記的。我想，應該沒人會反對的，就是一元二次方程式的根的公式。同學，你在背這公式的當時，或者，曾經有去想過一個問題嗎？就是當所考慮的方程式，不是一元二次，而是一元三次，一元四次…等等，的時候，是否也有公式來表示所考慮方程的解。如果你會考慮到這個問題，表示你的數學敏感度是蠻高的，所以你應該有成為數學家的潛力，如果沒有的話，那也沒有什麼，不需要太悲傷啊！大部分的人應該都是這樣吧，包括我在內，畢竟在這個世界上，要成為一個專業數學家，真的並不是那麼容易的事情。

我們這裡所謂的公式解，是指可以用簡單的四則運算，加減乘除，以及開根號，就可以把所考慮方程的解表示出來。上一段我們所考慮的問題，在一元二次時，早在西元前 1500 年，人類就知道其公式解了。至於 3 次以上的情形呢？就沒有那麼簡單了。不曉得是以前的祖先太笨，還是這個問題真的太難？幾乎等到 3000 年之後，也就是西元 1500 年左右，有一個義大利的數學家，叫 Ferro 的，才發現了三次方程的公式解

* 傅俊結，南台科技大學電子工程系副教授。

。當時義大利的數學界也是很奇怪，Ferro 有了公式解，卻不公開，反而把他的解，用來向其他的數學工作者挑戰的工具，意思就是，我會，你們會嗎？真是莫名其妙，以現在的術語來講，就是所謂的智障。有了三次方程的公式解，四次方程的公式解就很直接了，就是用一個新的變數來做變數代換，代換成的新方程式很容易求解，解出來之後，再代換回去，就完成四次方程解的工作了。

有了四次方程的公式解，很自然地，接下來當然就是去找五次方程的公式解。不過，結論是殘酷的，五次以上的方程式沒有公式解，是不存在的。這就是阿貝爾和伽羅瓦的工作。他們兩個被認為是近代群論的發明人，因為一元五次以上的單變數代數方程式沒有公式解的一般性證明，就是用群論來完成的。

阿貝爾在 1802 年出生於挪威，1815 年 13 歲時才正式入學，之前，基本上就是在家自學。以他的天份，的確可以做到這一點。當阿貝爾在 1821 年正式進入奧斯陸大學求學時，他在挪威的數學界已經小有名氣，在大三時就發表了期刊文章，可是就像現代人所講的，貧窮會限制想像力，因為他不能一直待在挪威。他必須出國，去法國，去德國，這兩個當時的數學大國，尋求指導和意見，可是沒錢啊！

阿貝爾在 18 歲的時候，他老爸就走了，他要讀大學，還要負責照顧全家。後來因為阿貝爾早期的一篇文章，挪威政府給了他一筆獎學金讓他可以出國，阿貝爾就靠這個補助出訪當時的數學權威，例如德國的高斯，法國的柯西。在出國之前的一段時間，阿貝爾早就把他在一元五次方程的公式解的文章寄到法國科學院以求發表，也寄給了高斯。可是高斯不相信，這樣一個困難的，歷史久遠的問題，只用六頁的文章就可以解決。因此，阿貝爾的德國行，基本上是失敗的，高斯把他忽略了。

事實上，阿貝爾的手稿寫成文章不只六頁，只因為他真的太窮了，頁數愈少就愈省錢。人真的不能窮，一窮就會限制住你的想像力。這六頁的文章寄到法國科學院之後，科學院的秘書看了文章的摘要，覺得這結果如果是對的話，將是一個令人驚艷的結果。於是，就把文章給當時最大牌的柯西審。可是，天不從人願，人在倒楣的時候，真的沒有下限，柯西也真的是王八蛋，居然把阿貝爾的文章弄丟了。就這樣，阿貝爾在國外的這段時間，不只沒有得到應有的榮譽，還把身體弄壞了，因為政府給他的獎學金太少，他只租得起很簡陋的沒有暖氣的房子，更慘的是，要回國時，不只要跟



人家借錢，還感染了肺結核。肺結核在當時的醫學是無法醫治的，只是在拖延時間，簡單的講，就是等死。阿貝爾的一生也就在 26 歲的時候劃下了終點。

接下來我們要介紹的伽羅瓦，從某一方面來講，更慘，就是他只活了 20 歲。

伽羅瓦和阿貝爾是同時代的人，伽羅瓦只比阿貝爾年輕 9 歲。伽羅瓦的早死，主要的原因是他對政治的狂熱，基本上他是一個所謂的政治狂熱份子，如果他活在現在的臺灣，他應該也會參加早期的太陽花學運，即使入獄也不後悔。

那時法國的七月革命爆發，校長是屬於保皇派的，他把學生關在校園裡，這引起了伽羅瓦的不滿。由於強烈支持共和主義，他曾經多次的入獄，後來也是因為政治理念的不同，居然答應要跟人家決鬥，而他的對手是使用槍枝的專家，他當然知道，他根本不是對方的對手，在決鬥的前 3 天，伽羅瓦可能知道，他所剩的日子不多了，因此他花了 3 天的時間，把他的數學理論寫了下來，並交代他的朋友，萬一他不測，請把他的數學結果寄給高斯。3 天後，他真的在決鬥當中敗下陣來，受了槍傷，經過幾天的療養，伽羅瓦還是在 1832 年的 5 月 31 號停止了呼吸。

但是寄給高斯的數學，高斯一直都沒有給回音，猶如石沉大海。當時的高斯在數學界也許是太權威了，可能每年都有很多人寄給他數學論文，大部分他可能連都沒看，就把它丟在旁邊。

經過大約十年之後，才由法國數學家 Liouville 肯定伽羅瓦的理論是正確的，並把它發表。伽羅瓦在阿貝爾死的時候才 18 歲，他那時候還是一個大學生，應該不曉得阿貝爾的工作。所以伽羅瓦方法有他的獨創性，他引進了一套新的工具，這個理論現在被稱為伽羅瓦群論，他用這套工具來證明一元 N 次以上的代數方程當 N 大於等於 5 的時候，是沒有公式解的。伽羅瓦的理論，在幾年之前，當 Wiles 證明費馬最後定理的時候，也起了關鍵的作用。

