



## 求函數的導函數

● 傅俊結\*

在我們學習微積分時，當要求函數的微分的時候，我們當然要先從定義出發。也就是要知道，所謂函數的微分是如何定義的。可是真正在做計算時，如果由函數的定義出發，我們必須去求一個該函數的平均變化率的極限值。我們都知道，求極限值並不是一個簡單的工作，除非是一個很簡單的函數，要不然，計算起來會非常的複雜，有時候甚至複雜到根本就是算不出來。

因此，我們必須有一套系統性的方法，不需要藉由定義，就可以求出一個函數的導函數。這個方法，基本上類似我們在國小的時候，在算兩個自然數的乘除所用的方法，那時候，我們應該先要去背所謂的九九乘法表，把這個九九乘法表背起來之後，再藉由一些簡單的運算法則，就可以很快的算出兩個自然數的乘積和商。因此，我們要算一個函數的導函數，也必須去背一些基本函數的導函數公式，這些基本函數的導函數公式，事實上，就類似九九乘法表。它們的相似性是在哪裡呢？我們可以把每個自然數看成是由 1 到 9 這 9 個自然數再加上零所組合起來的，同樣的道理，我們可以把我們所要微分的函數，看成是由所謂的基本函數所組合起來的。

在自然科學上，科學家在研究物質的構造時，也是有這個想法，科學家跟我們講說，所有的物質都是由原子所組成的，我們可以把基本函數看成就類似這裡所謂的原子。一個函數不管是怎麼複雜，它也是可以看成由基本函數所組合起來的，而組合方法就是加減乘除四則運算以及合成運算，因此除了基本函數的導函數公式之外，我們

\* 傅俊結，南台科技大學電子工程系副教授。

還必須背加減乘除的微分法則，對於合成運算來講，就必須使用到鏈鎖律。

基本函數的導函數公式 當然是用導函數的定義來證明的。常見的基本函數，有所謂的冪函數、多項式函數、三角函數、指數函數和對數函數等等。對指數函數和對數函數來說，最重要的是所謂的自然指數函數和自然對數函數，對這兩類函數來說，我們所要背的微分公式是自然指數函數和自然對數函數，而對於一般的指數函數和對數函數，當我們要微分他們的時候，應該要想辦法把它們轉成自然指數函數和自然對數函數，再來求得一般指數函數和對數函數的導函數。

一般的教科書裡面會寫很多的導函數公式，事實上，很多的所謂的導函數公式並不是用背的，而是要用算的，基本上有一個理念，雖然數學也是要背，但是我們應該想辦法去背最少的公式，但卻可以解決最多的問題。

上面所講的求導函數的方法，基本上都是對考慮的函數是所謂的顯函數，顯函數是指那些我們可以把該函數的因變數，明顯的，只用自變數來把他表示出來。但是有些函數我們是沒辦法把它用顯函數的形式表達出來，它會隱藏在一個方程式裡面，這個方程式只給出該函數的自變數和因變數的關係。當然在一些比較簡單的情況下，我們可以由該方程式出發，然後就像解方程式那樣，去把因變數解出來，只用自變數來表示。這種無法把函數的因變數明顯的用自變數來表示的函數，我們就稱為隱函數。

當我們要求隱函數的導函數時，我們所用的方法，並不是去把該函數的顯函數形式表示出來再去微分，這種方法很多情況下是做不到的，而是要用所謂的隱函數的微分方法，直接從該方程式下手，也就是題目一開始所給的，自變數和因變數的關係式。即使是這種隱函數的微分方法，我們也是要用前面所講的，加減乘除的微分法則及鏈鎖律，還有基本函數的微分公式。

當我們學會單變數的微分方法之後，接下來就自然進入多變數的微分方法。就是所謂多變數函數的微分方法，這時所考慮的函數的自變數不只一個，這時候計算上，我們最需要的是所謂的偏微分，也就是說，雖然所給的函數有兩個以上的自變數，但是，所謂的偏微分是只對其中一個自變數作微分，而其他所有的自變數都被看成是常數。即使到多變數的情形，所用的微分工具大部分還是要用到我們一開始所談到的單變數的微分方法。

