



單調性與凹性

● 傅俊結*

函數這個名詞出現在數學的各個領域之中。當我們要解決一個問題時，透過數學這個工具，基本上就是先要把問題數學化，而在數學化的過程當中，不可避免的，會引進函數的概念，這時要解決我們的問題，一大部分就是在解決我們所引進的，有關這函數的相關問題。

我們面對一個函數時，首先當然希望知道有關這個函數的一些基本性質。在大一微積分裡面，一個函數的基本性質，最先被討論的，應該就是函數的單調性和凹性，這兩個性質基本上就是微分的應用。

函數的單調性分兩種，一種是遞增，另外一種是遞減。我們說一個函數在一個區間是遞增的，意思也就是說，在這區間上，隨著該函數的自變數的增加，其對應的函數值也跟著增加，反過來說，當自變數增加的時候，其對應的函數值卻跟著減少，那我們就說，該函數在這個區間是遞減的。有了遞增和遞減的定義之後，那接下來的問題就是：我們給定一個可微分函數之後，我要如何判斷這函數的單調性？也就是說，在什麼區間？函數是遞增的；在什麼區間？函數是遞減的。先講結論，也就是，用該函數的一階導函數來決定該函數的單調性。當函數的一階導函數是正的時候，則這個函數在所考慮的區間就是遞增的；反之，一階導函數是負的時候就是遞減。為什麼一階導函數和函數的單調性可以聯繫起來呢？我們知道函數的導數有一個重要的幾何意義，也就是可以用來表示切線的斜率。因此，對一個單調遞增的曲線來說，它在每一

* 傅俊結，南台科技大學電子工程系副教授。



點的切線，都是由左往右上升的直線，這樣的直線的斜率是正的；反之，對於單調遞減的曲線，它在每一點的切線的斜率都是負的。

只靠函數的單調性，並沒辦法完全刻劃出一條曲線。我們很容易可以劃出兩條單調性一樣的曲線，但是它們有一個重要的性質是剛好完全相反的，這個性質就是我們現在要介紹的凹性。只有單調性和凹性結合起來，我們才能完整的刻畫出平面上的一條曲線。

首先，我們劃出一條單調遞增的直線，假設這條直線有些許的彈性，當你把它這條直線稍微往下壓一點的時候，它的單調性是沒有變的，還是遞增，但是，它有造成一個開口向上；反之，把這條直線稍微為往上推，這個動作也造出一條曲線，它有一個開口向下，但是單調性還是沒變，因此我們造就出了兩條曲線，它們都是單調遞增，但是前者有一個開口向上，我們就稱這條曲線的凹性是上凹，後者有一個開口向下，我們就稱這條曲線的凹性是下凹。跟前面決定單調性的問題一樣，現在我們的問題是，要如何去決定一個函數的凹性？答案是用該函數的二階導函數。為什麼是二階導函數呢？一看到這個結論，我們事實上一開始很難把一個函數的二階導函數和該函數的凹性連接起來。

二階導函數是一種所謂的高階導函數，也就是，把一個函數微分兩次之後所得到的新函數。理論上來說，一個函數可以微分任意次的話，你可以把它一直微分下去，但是把一個函數微分很多次之後，這樣得到的新函數，到底有什麼意義？基本上已經很難判斷出來了。比如說，把一個函數微分 100 次之後，所得到的 100 階導函數，到底有什麼意義？應該是，不管在數學上或物理上，都沒有什麼意義了。一個函數的二階導函數，是它所有高階導函數中最有意義的，不管是在物理上或者在數學本身上。在數學本身上，它最直接的應用，就是可以用來判斷一個函數的凹性。

結論就是說，一個函數的二階導函數，如果在一個區間是正的話，則這個函數在該區間就是上凹，如果是負的話，則這個函數在該區間就是下凹。一個函數在一個區間是上凹的話，那麼在這區間上，這個函數在它的函數曲線的每一點的切線斜率是會遞增的；反之，如果曲線是下凹的，那它在每一點的切線斜率是會遞減的。事實上，一個函數的凹性，是由該函數的一階導函數的單調性來決定的。



函數的單調性和凹性有什麼應用呢？它最直接的簡單的應用，在數學本身上，就是可以用來畫函數在座標平面上的曲線圖。我們在中學時，一開始在學習畫函數的圖形時，最簡單的就是一次多項式函數圖形。我們知道一次多項式的函數圖形是一條直線，要畫一條直線是一個很簡單的工作，只要隨便找出這條直線會通過的兩個點，把這兩個點在座標平面上標示出來，那麼連接這兩個點的直線就是我們所要的直線。

接下來就是 2 次多項式的函數圖形，這種圖形我們把它稱作拋物線，拋物線一共有兩種，一種是開口向上，另外一種是開口向下，要畫一條拋物線也不是很難，只要找出這拋物線的頂點，再判斷 2 次方的係數是正的，還是負的。正的話，該拋物線就是開口向上；負的話，該拋物線就是開口向下。我們可以用配方法來找出拋物線的頂點，總之，畫直線或者拋物線還不需要微分當作工具。

三次多項式以上的函數圖形，就沒有那麼容易畫了。這時如果不用微分這個工具，是畫不出三次多項式以上的函數圖形的，除非是那種很簡單的函數。給定一個函數，想要畫出它的函數圖形，普遍性方法，就是藉由該函數的一階導函數和二階導函數，決定出該函數的單調性和凹性，那麼我們就可以知道在什麼區間，該函數的曲線要遞增，或者遞減，或者上凹，或者下凹。這樣我們就可以完整的畫出該條函數曲線了。

