



不定積分

● 傅俊結*

學過微分之後，要如何了解積分呢？有沒有很簡單的方法，例如，只要一句話，就可以簡明扼要點出積分的意義，事實上是有的。我們可以簡單的講，積分就是微分的反運算。

大一的積分，可以粗略的分成不定積分和定積分，我們這裡所謂的積分就是微分的反運算，嚴格來講是指不定積分。要理解這個意義，首先要知道什麼是反運算？反運算並不是單獨存在的。為了理解反運算的意義，我們可以舉個大家都熟悉的例子來說明，就是我們從小學開始，就學過的四則運算，分別是加、減、乘、除。前面我所講的反運算並不是單獨存在的意思，也就是說，我們並不能說某個數學運算是反運算，必須有另外一個運算來比較。以加法和減法來比較，我們可以說減法就是加法的反運算，當然前提是我們已經學過加法。所以，你如果是先學減法，那你就可以說加法是減法的反應算，也就是加法和減法互為對方的反應算。一般來講，我們在小學的時候都是先學加法，應該沒有哪個小學會先教減法的吧，因為加法比減法簡單，容易了解。所以當你學過加法之後，要怎麼定義減法呢？我們就可以簡單的講，減法就是加法的反運算，反運算也就是這個意思。乘法和除法是一樣的道理，以乘法和除法來講，我們都是先學乘法，那當你學過乘法之後，你就可以說除法是乘法的反運算。

我們可以舉個更實際的例子，比如說 2 加 3 等於 5，意思也就是說，給 2，透過加 3 這個運算，得到 5。反過來問，要怎麼問呢？這樣問：給 5，我們去找一個數，使得

* 傅俊結，南台科技大學電子工程系副教授。



這個數加 3 會等於 5。很明顯，我們要找的數就是 2，那麼由 5 找到 2 的這個過程，我們就可以定義一個新的運算，這個運算就叫做減 3。由上面的說明，我們很明顯可以看出來，加 3 和減 3 就是互為對方的反運算。

現在回到微分和積分的概念，我們說積分是微分的反運算，事實上就類似前面我們所講的，減法是加法的反運算。我們還是舉一個實際的例子來說明，已經知道 x^2 的微分是 $2x$ ，也就是說，給定 x^2 ，透過微分這個運算，我們可以得到 $2x$ ，我們把微分的這個運算過程，反過來問的意思，也就是說，我現在給定 $2x$ ，要去找一個函數，使得這個函數滿足對 x 的微分是等於 $2x$ 。要找的這個函數，很明顯可以取 x^2 ，因為我們已經學過微分，知道 x^2 對 x 的微分是等於 $2x$ ，但是 x^2 並不是唯一的答案，因為我們知道常數的微分是 0，所以把 x^2 再加上任何一個常數所得到的新函數，也都滿足它對 x 的微分是等於 $2x$ 。換句話說，我們要找的答案有無窮多個，而這無窮多個函數，是由一個常數來襯托，它們之間並不是毫無章法，毫無秩序的，如果這無窮多個函數之間沒有任何關係，相信這套學問是不會流傳下來的，因為我們不可能用筆在紙上寫下無窮多個答案，我們必須要有一種方法能夠把這無窮多個答案寫下來，好在這無窮多個函數它的長相，都是 x^2 再加一個常數。因此可以用 x^2 加 C 來表示， C 表示任意常數，這 x^2 加 C 就稱為 $2x$ 的不定積分或是反導函數。我們把給 $2x$ 得到 x^2 加 C 的這個過程，看成是一種數學運算的話，這個運算直覺上看起來就是之前微分的反運算，我們就把這個運算稱為不定積分。

從前面我們可以看出，不定積分是微分的反運算；反過來講，事實上我們也可以說微分是不定積分的反運算，就在於，看你是先學積分還是先學微分，就像前面我們所講的加法和減法，你如果先學減法的話，那你也可以定義加法是減法的反運算。雖然照歷史的發展軌跡來看，積分是在微分之前就已經存在的，但是目前微積分的學習方法，相信全世界的大學微積分的教學，應該都不是先學積分再學微分，如果要這樣學習微積分的話，可能會對學生跟授課老師造成很大的負擔。由這個例子我們也可以發現，每一門學問在它的發展過程中，雖然說有它每一步的階段性任務 但是當人類真的把這門學問弄懂之後，為了學習上的需要，很多情況下，我們並不是照著它的歷史發展軌跡來學習的，因為人類的文明幾千年來所累積的學問實在是太多、太豐富了。



任何一個人的學習，如果要照著歷史發展來學習的話，根本沒有那麼多的時間和精力，人的生命是有限的，當你學習完之後，又必須展現出人類的創造力，發明新的學問，這樣人類的文明才能一步一步的走下去。所以我們在學習一門新的學問的時候，應該有它特殊的學習方法，而不是照著這門學問的歷史發展來學習，畢竟時間有限啊。

