



計算積分的一些技巧

● 傅俊結*

當我們要開始學習積分的計算時，不管是不定積分還是定積分，首先我們必須了解積分的一些基本性質。這些基本性質，對不定積分或者是定積分都是成立的。例如：常數乘以一個函數的積分，我們可以把常數提出來不用積分，也就是： $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$ 。另外，兩個函數相加減之後要積分，我們可以分別積分再加減，也就是： $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ 。接下來我們還要背一些基本函數的積分公式，我們只舉一個例子來說明，就是最常見的 n 次方這類函數的積分：

$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$ 。藉由上面兩個積分的性質，以及這個基本函數的積分公式，我們就可以算很多函數的積分了。我們舉一個簡單的例子：

$$\int (2x^2 - 3x + 5) dx = 2\int x^2 dx - 3\int x dx + 5\int x^0 dx = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + C。$$

上面所舉的例子是一個很簡單的情形，函數的積分的計算，基本上是一個很困難的工作，隨便給一個函數，大部分的情況下我們是積分不出來的，很多情況下，都要藉由一些特殊的技巧才能積分出來，接下來我們要介紹的技巧，一般叫做代換積分。這個代換積分的技巧，基本上就是引進一個新的變數，把我們所要積分的函數，轉換成一些基本函數的型態，經過這樣的轉換之後，我們所要求的積分已經轉換成基本函數的積分公式的型態，接下來就可以求出積分了。例如，如果我們要求 $\int (2x-3)^5 dx$ ，那麼我們所要考慮的函數，就是五次方的函數，所以我們可以假設 $u=2x-3$ ，那麼

* 傅俊結，南台科技大學電子工程系副教授。



$du=2dx-3$ ，而原來的積分可以轉換成 $\frac{1}{2} \int u^5 dx$ ，這樣就很容易可以算出我們所要求的積分，而不需要把 $(2x+3)^5$ 展開。雖然把 $(2x+3)^5$ 展開只有六項，我們也是很快可以求出所要的積分，但是如果把 5 次方改成 50 次方的時候，這時候就不能用展開的方法來算了，否則會算得沒完沒了。可是用我們的來反擊分的方法你即時把 50 次方改成 500 次方 5000 次方我們 A 都可以很快求助所要的積分

第二個我們所要介紹的積分技巧是藉由三角函數的幫助。三角函數雖然從名稱上看起來，主要是和三角形的關係。事實上，跟三角函數最有關係的並不是三角形而是圓形。即使沒有三角形的存在，只要有一個圓，我們仍然可以定義三角函數。所以，有一些函數的積分，雖然所要積分的函數看起來跟三角函數沒有關係，但是藉由三角函數的引進，我們可以把所要求的積分轉換成三角函數的有關積分，然後直接把這個有關三角函數的積分算出來，再把它轉換回去，就可以得到所要求的函數的積分。我們舉兩個例子來說明這樣的轉換，如果要算 $\int \frac{1}{1+x^2} dx$ ，我們可以假設 $x=\tan\theta$ ，則 $dx=\sec^2\theta d\theta$ ，而且根據三角函數恆等式 $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$ ，所以 $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \int d\theta$ ，這樣我們就可以很快算出所要算的積分了。再例如 $\int \sqrt{1-x^2} dx$ ，所要積分的函數 $\sqrt{1-x^2}$ 看起來好像跟三角函數沒有關係，但是如果假設 $x=\sin\theta$ ，則 $dx=\cos\theta d\theta$ ，且 $1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$ ，所以 $\int \sqrt{1-x^2} dx = \int \cos^2\theta d\theta = \int \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{1}{2} \int (1+\cos 2\theta) d\theta$ ，這裡我們用到了三角函數的二倍角公式。這樣我們很快就可以算出以 θ 變數所表示的積分，最後再把它轉回變數 x ，就是我們所要的答案了。

最後我們所要介紹的一個技巧，被稱作分部積分，有的也翻譯成部分積分，它是英文 *integration by parts* 的翻譯。這個技巧主要就是指下面這個公式 $\int u dv = uv - \int v du =$ ，這裡的 u 和 v 是任意兩個可以微分的函數。等號的左邊是 u 對 v 的積分，等號的右邊有 v 對 u 的積分，所以當我們所要算的積分是等號左邊的積分而且很難算的時候，我們可以先算等號右邊的積分，只要等號右邊的積分可以算得出來，那麼我們所要算的等號左邊的積分也就算出來了。自然對數函數是一個很著名也很重要的一個函數，它的積分藉由分部積分的技巧，我們很快就可以算得出來。



$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x d \ln x = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C。$$

一個單變數函數的積分的計算，事實上是一個很困難的工作，沒有一些技巧的幫助，大部分的函數的積分的表達式，我們是寫不出來的。上面所介紹的三個技巧主要是大一微積分的課程中都會介紹的方法。當然數學上還有很多的技巧可以用來計算積分，比如說著名的用複變函數的計算留數的技巧，不過一般這個技巧在大一的微積分中並不會被提到，所以在這裡我就不寫了。最後，不管我們是用什麼技巧在算積分，如果你要很熟練這些積分的計算的話，最大的幫助就是你要很用功的去算很多的積分題目，藉由計算很多題目的積分，來培養你的計算能力，這是唯一不變的訓練自己成為一個積分高手的唯一方法。

