瑕積分

● 傳俊結*

瑕積分是一種特殊的定積分。當所考慮的定積分的積分區間是無限大的時候，或者，雖然積分區間是有限的，但是在積分區間裡面存在有被積分函數不連續的點，這時候，我們所考慮的定積分被稱為瑕積分。一般我們在求一個定積分的時候，最常用的方法是藉由微積分基本定理，首先我們必須把被積分函數的反導函數算出來，然後把這個反導函數在積分上限的函數值跟在積分下限的函數值相減，所得到的值就是我們所要求的定積分。

要用微積分基本定理，當然必須滿足微積分基本定理的假設條件，它的假設條件就是被積分函數必須在積分區間上面是連續的，而且積分區間是有限的，只有滿足這兩個假設條件，我們才能直接套用微積分基本定理來算定積分。瑕積分就是沒辦法滿足微積分基本定理的假設條件，雖然如此，我們還是要藉由微積分基本定理來算瑕積分，只是並不是直接像平常的狀況下直接套用。

我們舉一個很簡單的例子：

求 $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ ，這很明顯是一個瑕積分，因為積分區間是無窮大。我們要算這個瑕積分，先借用微積分基本定理，就是先從 1 積到一個有限的數，把它叫做 t，那我們可以求出這個積分 $\int_1^t \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^t = 1-\frac{1}{t}$ 。最後，我們必須取一個極限，就是讓 t 趨近於無

* 傅俊結，南台科技大學電子工程系副教授。

南台通識電子報
2020 年 7 月 15 日出版
南台科技大學通識教育中心 發行
89

窮大。取極限只有兩種可能，一種是極限存在，一種是極限不存在，當極限存在的時候，其極限值是一個有限的數，我們就說此瑕積分收斂到這個有限的數，否則當極限不存在的時候，我們就說這個瑕積分是發散的。

我們考慮一個發散的例子：$\int_1^t \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\,|_1^t = 2(\sqrt{t}-1)$。當 t 趨近於無窮大時，$2(\sqrt{t}-1)$ 沒辦法趨近於一個有限的數，所以我們考慮的瑕積分是發散的，為了更精準描述它是如何發散，我們可以借用無窮極限的符號，把它寫成 $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \infty$。

上面所舉的兩個例子，是下列的瑕積分特殊情形：$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$。這裡的 P 是一個參數，很明顯，當 $P \le 0$ 時，這個瑕積分會發散到無窮大。當 P 是正數的時候，隨著不同的參數 P 值，這個瑕積分可能收斂或者發散。$\frac{1}{x^p}$ 的反導函數我們可以很容易的算出來，接下來用微積分基本定理，我們就很容易判斷出當 $P>1$ 時，此瑕積分是收斂的；當 $0<P\le 1$ 時，此瑕積分是發散的。事實上，此瑕積分的收斂或發散，是由所考慮的函數 $\frac{1}{x^p}$，在無窮遠處的行為來決定的。當 $P>1$ 的時候，這個函數在無窮遠處降的夠快，就是函數圖形趨近於水平線 x 軸夠快，使得曲線下面的面積會有限，因而收斂。而當 $0<P\le 1$ 時，我們可以說，它降的不夠快，導致曲線下面的面積會趨近於無窮大，因而發散。雖然說 $\frac{1}{x^p}$ 在無窮遠處都會趨近於零，但是，我們還是要分別它到底降的快還是不夠快，以這種幾何的概念來理解這個蝦積分，是有他的教育意義的。

我們上面舉的例子，在瑕積分上是一個很有名的例子。基本上，我們可以把它看成是一個模型，這個模型可以用來判斷其他一些蝦積分的收斂或者發散。大部分的瑕積分並沒辦法像我們這個模型例子，可以直接把它算出來，再用微積分基本定理來判斷它是收斂還是發散。事實上，大部分的瑕積分我們是沒辦法直接用一個明顯的式子把它算出來的，所以我們必須有一個比較的方法，也就是已知的一個瑕積分的收斂發散結果，來和未知的瑕積分比較，而最被常來拿來用以比較的瑕積分，就是我們上面

舉的這個例子。舉一個例子，我們要判斷 $\int_1^\infty \frac{1}{1+x^5}dx$ 是否收斂發散。$\frac{1}{1+x^5}$ 的反導函數是很難算的，所以，我們並不能直接對這個瑕積分來做判斷收斂和發散。我們要用比較的，因為 $\frac{1}{1+x^5} \leq \frac{1}{x^5}$，當 $x \geq 1$ 時。而且我們已經知道 $\int_1^\infty \frac{1}{x^5}dx$ 是收斂的，所以 $\int_1^\infty \frac{1}{1+x^5}dx$ 也會收斂。雖然我們知道某個瑕積分會收斂，但是如果要問的更詳細一點，當然是要知道它會收斂到那裡？不過這就不是一個簡單的工作了，可能必須用很巧妙精細的計算技巧，才能知道它的收斂值。這就不是我們現在所要探討的問題了，而且大部分情況下，可以這樣說，並沒有普遍性的方法，可以完成這個工作，基本上是 case by case，不同的問題就有不同的技巧去解決。