科普新知

可微分性

傅俊結*

函數是數學上所考慮的一個主要概念，把所有的函數看成是一個群體的話，這個群體的構造太巨大，太複雜，不是我們人類的能力所能夠理解與處理的。因此，我們必須從這個巨大的結構裡，抽出一些我們可以上手的，有特殊性質的函數來了解。例如：連續函數、可微分函數、三角函數、解析函數、指數函數、對數函數、多項式函數等等。當我們把這一些特殊的函數精通了解之後，再推而廣之，考慮更大的函數群體。簡單講就是由簡而繁。一般來說，不管是在數學上或科學上，由簡而繁的理解都是一種探討未知的一個基本方法。這篇小文章我們就是要考慮一類特殊的函數，所謂的可微分函數，那這可微分是什麼意思。

我們先從單變數函數開始談起，也就是大一微積分上學期首先考慮的一類函數。單變數函數就是只有一個自變數的函數。這時候，我們說這樣的函數$f(x)$在一個點$x=a$ 可以微分的意思，也就是下列的極限存在：

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

由這個導數的極限定義，我們就可以了解一個函數在一個點可以微分的意思，不只和這個函數在這個點有關係，還跟這個函數在這個點的附近的行為有關。如果以符號$f'(a)$來表示這個導數的話，這時我們所考慮的函數$f(x)$在這個點$x=a$ 的附近，就可以用下列的線性函數來估計：$f(a)+f'(a)(x-a)$ 。

* 傅俊結，南台科技大學電子工程系副教授。

上面這個函數，事實上就是一條直線的表達式，這條直線我們就稱為在所考慮的點$x=a$ 的切線，所以從幾何意義上來說，單變數函數在一個點能不能微分就是過這個點有沒有切線的存在。函數在一個點的導數也可以稱為在這個點的瞬時變化率。上面我們所要取極限的那個量，就是平均變化率。在應用上，我們所考慮的物理量並不是永恆不變的常數，常常某個物理量會隨著另外一個一個物理量的改變而改變，而這種改變的大小，就是變化率。所以這時候，一般我們就是用變化率來代表導數。

接下來我們要考慮多變數的函數，這時候，函數是依賴好幾個自變數在變化，所以這時候微分的概念就會比前面的單變數函數還要複雜。雖然如此，但是基本上都是前面單變數函數的微分的一種推廣。我們就從最簡單的兩個自變數的多變數函數來理解，三個自變數以上的多變數函數的微分概念，基本上就是兩個自變數的多變數函數的擴充。首先我們考慮偏導數，因為我們現在有兩個自變數，所以我們要推廣前面的單變數函數的情形，必須先把其中一個自變數固定不變，只讓另外一個自變數在變，所以類似上面的那個單變數函數導數的極限定義，我們就有下面需要考慮的兩個極限值

$$\frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a}$$

$$\frac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b}$$

這兩個極限值就分別被稱為對x 和對y 的偏導數。第一個極限y 是不變的，也可以說沿著x 方向，函數在所考慮的點(a,b)對x 的變化率。同理，第二個極限也可以有類似的解釋。偏導數是方向導數的一種特殊情形，因為我們現在考慮的函數有兩個自變數，所以這兩個自變數所變化的區域是在平面上，而從平面上的每一點出發，我們可以考慮無窮多個方向，偏導數就是沿著該點的水平方向和垂直方向。即使在一個點的偏導數都存在，甚至對每一個方向的方向導數都存在，也並不保證在這個點是可以微分的。這在大一的微積分教科書中，有很多這樣的例子來說明，方向導數的存在並沒有辦法保證可微分性。這是多變數函數的可微分性和單變數函數的可微分性的一個重大的差別。在單變數函數的情形，我們說在一個點是可以微分的，只要在那個點的方向導數存在，也就是沿著水平方向的導數存在。但是在多變數函數的情形就是比較

複雜了，可微分不只要求方向導數要存在，事實上，他要求得更嚴格，但是簡單的講就是必須可以線性化，也就是，必須存在一個線性映射用來估計該多變數函數。可以這麼說，微分這個概念的存在，就是我們要用來解決非線性的問題，非線性的現象太複雜了，我們的能力並沒辦法去解決它，我們只能近似的解決他，也就是用微分這種線性化的概念來估計問題的非線性的本質。