南台通識電子報
2021 年 1 月 15 日出版
南台科技大學通識教育中心 發行
92

科普新知

工程數學上微分方程的一些基本解法

● 傅俊結*

工程數學應該是全世界大學工學院的必修科目，一般從大二上學期開始教。研究型的大學應該是連續修三學期，技職型的大學可能是修兩學期。隨著學校系所的不同，授課老師的不同，工程數學的授課內容也會不一樣。畢竟，可以用在工程上的數學工具太多了，不可能把所有的這些數學工具通通教完。但是不可避免的，一開始應該都是會教一些基本微分方程的解法。在這裡我們要介紹一些常見的微分方程的求解方法。什麼是微分方程呢？ 簡單地講，帶有等號的一個數學式子，就稱為方程式，在這方程式中，如果考慮的未知量是一個函數，而這個函數滿足的這個方程式裡面，有關於這函數的微分的運算，我們就可以把這個方程式稱為微分方程式。

最簡單的微分方程式在大一微積分下學期講到不定積分時我們就遇到了。給定一個函數$f(x)$之後如果存在一個函數$F(x)$，滿足$\frac{dF(x)}{dx}=f(x)$，這$F(x)$稱為 $f(x)$的反導函數或不定積分。現在如果用微分方程的術語來講，滿足$\frac{dF(x)}{dx}=f(x)$ 的方程式就是一個一階微分方程式，$f(x)$是已知的，$F(x)$是所要求的解。 根據不定積分的定義，$F(x)$可以表示為$F(x)=\int f(x)dx$。因此解這個很基本的微分方程，就是在求一個函數的不定積分。接下來稍微推廣一下，考慮下列的微分方程

* 傅俊結，南台科技大學電子工程系副教授。

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

y就是所要求的解，等號右邊的$f(x, y)$此時帶有兩個變數x和y，這時要解這個y就不是一件簡單的工作，老實講，是一件非常困難的工作。尤其是$f(x, y)$任意給定的話，要求y根本是一件不可能的任務。一般來說，在大學的工程數學，這個$f(x, y)$都是特別經過選擇之後所給的。以便我們可以容易的解出y。

我們先考慮一種可分離變數的情形，也就是$f(x, y)$可以寫成兩個函數的乘積，而這兩個函數分別是單變數x和的函數。這時所考慮的微分方程可以寫成

$$p(x)dx = q(y)dy$$

接下來就在等號兩邊做個積分，就可以求出解了，可能是顯式解或者是隱式解。很明顯的，要明顯的解出來跟$p(x), q(y)$有關，當$p(x), q(y)$不是很好積分的時候，也是無奈。

如果所考慮的微分方程沒辦法化成可分離變數的時候，有一種情形我們也是很容易解出來，這就是我們現在要介紹的正合微分方程(exact differential equation)。下列的微分方程

$$p(x, y)dx + q(x, y)dy = 0$$

稱為正合的，如果存在一個多變數函數$u(x, y)$使得$p(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}$，$q(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}$，也就是$p(x, y)$和$q(x, y)$分別是$u(x, y)$對$x$和對$y$的偏導函數。這時所考慮的微分方程可以寫成

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0$$

上式等號左邊就是$u(x, y)$的全微分。也就是：

$$du(x, y) = 0$$

所以

$u(x,y)=C$

就是所要求的解，這裡 C 是一個任意常數。

當所考慮的微分方程不是正合的時候，有一種情況下我們也是可以去解它，就是透過積分因子，積分因子就是在所考慮的微分方程等號的兩邊乘以一個適當的函數，這個函數稱為積分因子，使得所得到的新的微分方程會是正合的。找到積分因子之後，接下來的工作就跟前面所講的，基本上沒什麼差別。

最後我們考慮一個二階的微分方程，也就是所考慮的函數有微分兩次的項，最簡單的情形就是常係數二階齊次微分方程：

$ay'' + by' + cy = 0$

這裡a,b,c是常數，y是所考慮的未知函數，也就是這個微分方程的解。 基本上，它的解我們是先用猜的，因為a,b,c是常數的關係，而且這個微分方程是線性的，而且指數函數的微分是沒有變的，因此我們可以猜這個微分方程應該會有指數函數型態的解。假設e^{kx}是解，直接計算可以知道，k 必須滿足：

$ak^2 + bk + c = 0$

這是一個一元二次方程式，稱為特徵方程式，由國中所學可知，隨著判別式b^2-4ac 的值不同，會有三種情形發生。

第一種情形是最簡單的，也就是判別式大於零的時候，此時這個一元二次方程式會有兩個不同的根，假設這兩個不同的根分別是k_1和k_2，因此我們有了兩個解e^{k_1x} 和 e^{k_2x}，那接下來的問題就是說，這兩個解是不是這個微分方程式的所有解，事實上，還有其他的解，不過根據二階微分方程的一般理論，可以證明這個微分方程式的所有解，是由這兩個解做線性組合生成的，也就是說，它的通解可以寫成，$c_1e^{k_1x} + c_2e^{k_2x}$，這裡的$c_1$和$c_2$是兩個任意常數。

第二種情形是判別式等於零的時候，這時特徵方程式只有一個根，事實上有兩個

南台通識電子報
2021年1月15日出版
南台科技大學通識教育中心 發行
92

根，只是這兩個根是相等的，也就是所謂的重根。假設這個重根是k，這時我們找到了一個微分方程式的解 e^{kx}，只靠這個解並不能產生所考慮微分方程的所有解，我們必須再找到另外一個跟這個解線性獨立的解。用降階法可以證明，這個解是 xe^{kx}。因此通解可以寫成：$c_1e^{kx}+c_{2x}e^{kx}$。

第三種情形是判別式小於零的時候，此時特徵方程式的解是兩個共軛複數根。 假設這兩個共軛複數根的實部和虛部分別是p和q，那麼藉由 Euler 恆等式，e^{ix}=$cosx+isinx$，我們可以把通解寫成$e^{px}(c_1cosqx+c_2sinqx)$。

如果所考慮的方程是非齊次微分方程的時候，也就是說，所考慮的微分方程的右邊有一個非齊次項的時候，這時我們必須再找一個特解，把前面所講的齊次方程的通解，再加上這個特解，就是所要求的所有解。