



數的演化

● 傅俊結*

如果把數看成像生命一樣，那麼，數應該也有它的演化歷史。不過，數的演化應該沒有像生命的演化那麼複雜，那麼的沒有理性。即使到 21 世紀的今天，人類對生命的源頭，事實上還沒有一個很理想的答案。數就不一樣了，數的源頭或者說它的起始，應該就是自然數。就像德國數學家 Kronecker 所講的，自然數是上帝創造的，其他的所有數都是人類發明的。自然數就是我們小時候一開始所學的數，這些數基本上是爸爸媽媽教給我們的，不是學校老師教的。當我們還不能走路，只會爬行的時候，應該有很多爸爸媽媽就會教他們的小寶貝數一數，雖然說那時候的小孩子說不定還不會講話，但是爸爸媽媽就是這樣一直唸 1234567 給小寶寶聽，唸久了，等小孩子會講話的時候，事實上，他也會讀 1234567 了。於是，我們就這樣學會了自然數。

很快的，我們的老祖宗應該很快地就會發現自然數是不夠用的，舉個簡單的例子，當我們的資產有 100000 的時候，我們可以用 100000 這個自然數來表示我們的資產，但是當我們是負債的時候，那我們的資產不可能用一個自然數來表示。所以祖先就發明了負的自然數，還有一種情形，我們沒有負債也沒有資產，因此，我們可以說，0 就這樣出現了，就是一無所有。把正的自然數和負的自然數以及零合起來，這些數就是所謂的整數。因此自然數有另外一個名稱，叫做正整數。接下來，祖先們應該很快會發現，整數不夠用了，比如拿一把刀把一個蘋果切成兩半，那每一半要怎麼來表示呢？於是，我們就有了所謂的分數，分數的另外一個專業名稱，叫有理數。也就是說

* 傅俊結，南台科技大學電子工程系副教授。



，所謂的有理數，就是把兩個整數相除之後所得到的新的數，當然零不能當作有理數的分母。有了有理數之後，事實上在我們的日常生活中就已經足夠用了。這個夠用至少用了一千年，即使到現在 21 世紀的今天，我們的日常生活所需要用到的數，主要也是有理數就很夠用了，而有理數就是我們小學所學到的數，所以可以這麼說，每個國家在教育上，至少要讓他的國民讀到小學，也就是義務教育。

有理數有一個重要的特性，叫做稠密性。就是這個稠密性，讓人類有幾千年覺得並不需要新的數，而稠密性這個性質，在自然數跟整數是都沒有具備的。我們畫一條直線，把這條直線叫做數線，在這條數線上任取一個點，叫做原點，這個原點代表零，原點的右邊的點表示正數，左邊的點代表的就是所謂負數。很明顯，任何兩個整數之間，在這條數線上都有無窮多個點沒辦法用整數來表示。所謂有理數的稠密性，就是任何兩個有理數之間一定至少存在一個有理數，以這個稠密性的觀點來看，我們可以說，有理數是密密麻麻的分佈在這條數線上，這樣的密密麻麻以我們的肉眼來看，好像有理數可以把這條數線上面的所有點填滿。可是隨著人類文明的進步，有那麼一天，不曉得是哪個智者，他終於發現光靠有理數是沒辦法把那一條線上面的所有點填滿的，也就是說，在這條數線上面存在一種點，這個點是沒辦法對應到有理數的。後來更發現，這種點不是很少，是非常的多，比所有有理數的這些點更多。比如說，給一個直角等腰的三角形，他的兩個腰長分別是 1，那麼這個直角等腰三角形的斜邊長度是沒辦法用有理數來表示的。我們現在知道這個斜邊的長度就是根號 2，也就是說根號 2 不是有理數，因此不存在兩個整數，它們相除之後會等於根號 2。我們就把這種不是有理數的數叫做無理數。

所有的有理數和無理數合起來叫做實數，而實數的一個重要特性，就是能彌補有理數的一個缺憾，就是前面我們提到的，光靠有理數並沒辦法把數線上面的所有點填滿，當加上無理數進來的時候，我們就可以把這條數線上面的所有點填滿，更重要的是剛好填滿，也就是不多也不少，一個點對應 1 個數，1 個數對應 1 個點，我們就是需要這個性質，才能把那一條數線座標化。從有理數進化到無理數，可以說是人類在數學上，在文明上的一個大躍進。沒有這個大躍進，基本上我們人類就是還停留在原始時代。要分別有理數和無理數，有一個簡單的方法，就是用小數點。我們知道每一個



數都可以用帶有小數點的數來表示，當小數點後面有無窮多位而且這無窮多位會循環的時候，或者小數點後面只有限位的時候，這個數就是有理數。而小數點後面有無窮多位而且沒辦法循環的時候，這個數就是無理數。

從自然數到整數、有理數、無理數、實數，不只在日常生活上夠用，即使在學術上，實數也已經非常好用了。但是人類的思考腳步是不會停下來的。在某些情況下，人類又發現實數是不夠用的，只是這時候的發現已經不是我們日常生活中所能體會的，所需要的。考慮最簡單的例子，就是我們在國中的時候所學的解一元二次方程式，一元二次方程式的解可以用一個公式來表示，這個公式有一個叫做判別式的式子，這個判別式用來表示這個一元二次方程式在什麼情況下，有兩個根、一個根、或者無解。當判別式小於 0 的時候是無解的，這裡所謂的無解，是指考慮的數是實數的情況下，科學家們為了使這個方程式，即使在判別式小於 0 的時候也是有解，於是發明了新的數，就是所謂的虛數，這種數包括實數，剛被提出來的時候，沒有任何的應用可言，從日常生活來理解更是不可理解，虛數的虛就是所謂的虛構的。所以虛數的發明，就是科學家純粹一種理性的思考所創造出來的。可是後來發現虛數在科學的應用上是到處存在的，尤其當你要考慮波動的時候，虛數是必需的數學工具。虛數之後也有新的數被發明出來，只是這些數真的就是很抽象了，離我們很遠了，因此我們就不繼續談下去了。

