科普新知

連續函數及其基本應用

● 傅俊結*

在大一微積分中有一類特別的函數會引起數學家的特別注意，就是所謂的連續函數。有了極限的基本概念之後，我們就可以定義連續函數。首先我們定義一個函數在一個點連續的意義，也就是說，當這個函數的自變數非常的接近這個點的時候，其對應的函數值也會非常接近，該函數在這個點的函數值，滿足這個條件，我們就說該函數在這個點是連續的。以數學符號表示為 $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

滿足上式，就稱$f(x)$在$x = a$是連續的。而所謂的連續函數，就是該函數在其定義域裡面的每個點都連續的函數。以函數圖形的概念來說，連續函數其對應的函數圖形，直覺上就是一條沒有斷掉的曲線。函數在一個點不連續，基本上分成下列幾種情形，第一種是在該點函數根本就沒有定義，但是他的極限值有存在，另外一種情形，雖然在函數所考慮的點有定義，但是在該點的函數極限值並沒有等於在該點的函數值。簡單的講，連續函數就是要求在其定義域內的每個點，其函數值跟極限值要相等。連續函數可以再細分成左連續和右連續，也就是說，如果在一個點的函數值有等於在該點的左極限，那我們就稱這個函數在這個點是左連續的，不管在這個點的右極限有沒有存在，即使有存在，但是在該點的右極限並不要求等於左極限，這時在考慮的點，他的極限值是不存在的，因此在考慮的點是不連續的。同理我們可以定義右連續，也就是在所考慮的點的右極限和函數值是相等的，我們就稱函數在這個點是右連續的。

接下來我們要介紹連續函數的一些很基本的應用。連續函數可以用來解方程式，

* 傅俊結，南台科技大學電子工程系副教授。

這裡的解方程式，大部分情況下，我們並不是可以把方程式的根真正的明顯的解出來，我們只能證明這個方程式有根的存在。事實上，在很多情況下，解的存在性能得到證明就已經是了不起的成就了。所用的方法就是所謂的中間值定理。這個定理是講說，我所考慮的函數如果是一個連續函數$f(x)$，那麼在其定義域中的兩個點$x=a$和$x=b$，所取得的函數值$f(a)$和$f(b)$，如果是不一樣的，那麼對於這兩個函數值中間的任何一個數M，一定在$x=a$和$x=b$之間，存在一點$x=c$，使得$f(c)=M$。

因此如果存在兩個點，在這兩個點的函數值是異號的，那麼在這兩個點之間一定存在所考慮方程式的解。另一個很有趣的直接結果，就是如果考慮的連續函數是一個奇數次方的多項式函數$f(x)$，那麼$f(x)=0$一定有解。因為最高次方是奇數次方，所以當自變數正的很大的時候，所考慮的多項式函數$f(x)$一定是正的，而當自變數負的很大的時候，所考慮的多項式函數$f(x)$一定是負的，因此由中間值定理，所考慮的方程$f(x)=0$一定有解，因為零在正的和負的之間。

另一個著名的應用就是稱為 Rolles 定理。這個定理是講說，對於一個一次可微分連續的函數，如果存在兩個點使得他在這兩個點的函數值是一樣的，那麼在這兩個點之間，一定存在一個函數導數為零的點。對這個定理的理解，我們可以畫函數的圖形是最容易理解的。在連續的兩個函數值相等的點，導函數在這兩個點一定是異號的，因此在這兩個點之間一定存在導函數等於零的點。這個 Rolles 定理的推廣，就是所謂的均值定理。

跟連續函數比起來，另外一類性質更好的函數，就是所謂的均勻連續函數。這類函數在數學的理論應用上，比連續函數更好用。因為他要求的更多，一個簡單的例子就是，一序列連續函數的極限不一定是連續的，但是一序列均勻連續函數的極限也是連續的。一般來講，對函數要求得愈多，他就有愈好的性質，也就有更好的應用。所以在大一的微積分裡，連續函數之後，我們就要考慮所謂的可微分函數，而可微分函數跟連續函數比起來，所要求的就更嚴格了，以函數圖形的觀念來講，可微分函數的圖形曲線是平滑的，不像連續函數可以很粗糙不平滑。可微分函數之後，如果要求的要更嚴格，那麼在大學裡面，所學的就是所謂的解析函數，這類函數我們就不在此討論了，因為它是屬於高年級複變函數的範圍。