



求積分的幾個技巧

● 傅俊結*

在大一下學期學習積分時，求一個函數的不定積分或者反導函數，是一個基本的且最重要的工作，即使要算一個函數的定積分，大部分情況下，根據微積分基本定理，我們也是要先算該函數的不定積分。一般來說，給定一個函數 $f(x)$ ，要算它的不定積分 $\int f(x)dx$ ，是一件很困難的工作。大部分的情況下，我們是算不出來的，也就是說，沒辦法明顯的寫出一個函數的表達式來表示所要求的不定積分，即使算得出來，有時候也是要靠很多的特殊技巧才算得出來。首先，我們必須先把一些基本函數的積分公式背起來，這些基本函數，包括多項式函數、冪函數、自然指數函數、三角函數等等。藉由這些基本函數的積分公式，再加上函數相加減的積分法則，我們就可以求一些函數的不定積分了。可是，如果只靠這些的話，我們所能求的函數的不定積分是不多的，在這裡我們要介紹一些技巧，藉由這些技巧，我們可以求出更多函數的不定積分。

第一個我們要介紹的技巧，一般稱作代換積分法，這個方法基本上就是把所要積分的函數，透過某種代換，把它代換成基本函數的形式，再由基本函數的積分公式就可以求出所要求得積分。舉一個例子：如果要求 $\int (2x + 1)^{10} dx$ ，一個基本的方法，當然就是把所考慮的函數 $(2x + 1)^{10}$ 展開，這樣展開之後一共有 11 項，這時這 11 項每一項都可以用基本函數的積分公式把它算出來，那我們就求出所要算的積分了。很明顯，這並不是一個好的方法，萬一所考慮的函數是 100 次方的呢？或者 1000 次方的呢？這時候當然不能用這種展開的方式來算所要求的積分。首先我們可以看出，所要求的積分，是一個 10 次方的函數的積分，雖然它不是標準的 x^{10} ，我們可以藉由一個代換

* 傅俊結，南台科技大學電子工程系副教授。



，例如假設 $u = 2x + 1$ ，然後兩邊取微分， $du = d(2x + 1) = 2dx$ ，這時 $dx = \frac{1}{2}du$ ，我們就可以把它轉換成標準的 10 次方的函數的積分了， $\int (2x + 1)^{10} dx = \frac{1}{2} \int u^{10} du = \frac{1}{22} u^{11} + C = \frac{1}{22} (2x + 1)^{11} + C$ 。由這個例子我們可以了解，代換積分的技巧，主要就是透過一個新的變數的代換，把所考慮的函數轉換成基本函數的形式，再藉由基本函數的積分公式，我們就可以求出所要的積分。

接下來我們介紹第二個技巧，這個技巧一般稱為分部積分或者部分積分，integration by parts。這個技巧主要是指這個公式： $\int u dv = uv - \int v du$ 。這個公式是由乘法的微分法則，把這個微分法則用微分的形式寫下來，然後兩邊積分就可以直接得到。這裡的 u 跟 v 是兩個可以微分的函數。當我們在算一個積分的時候，所謂的做一次分部積分就是把這個公式用一次。等號左邊的積分是 u 對 v 的積分，等號右邊有一項是 v 對 u 的積分，這個公式告訴我們，當你所要求的左邊積分很難算，或者算不出來的時候，可以試著把 u 跟 v 對調，如果右邊的積分很好算，把它算出來，再用 uv 去減掉所算的積分，就是左邊我們所要求的積分。什麼時候我們可以用分部積分，也就是說，什麼時候可以把 u 跟 v 對調，這並沒有普遍性的法則可以遵循，有的話教科書就會寫了，這個純粹是靠經驗，而這經驗的養成就是要去多做題目，這是唯一的方法。當你題目做多了之後，你就會有一種感覺，這種感覺會使你看到什麼樣的積分，就知道該要用分部積分了。舉一個例子：

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x d \ln x = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + C$$

自然對數函數也是一個基本函數，但是我們並沒有把自然對數函數的積分，當作基本公式在背，而是用像上面那樣的計算。這是分部積分技巧的一個最直接的應用，由這個例子我們也可以看出分部積分的功用。分部積分公式不只在算積分的時候是一個很重要的技巧，在更高等的數學，例如當我們要定義一個函數的弱微分的時候，分部積分公式也是一個起點。一個可以微分的函數，對我們來講就是所謂的好函數。這些所謂的好函數在運算上，我們比較可以暢行無阻。但是有些函數也是時常出現，但是它卻有不好的地方，就是不可微分的點。例如絕對值函數，它在原點是不能微分的，這時候我們要處理這些函數，我們必須把微分的概念推廣，這時候就要引進弱可微的概念，而這個概念就是由分部積分公式出發。