科普新知

求積分的幾個技巧（二）

● 傅俊結*

在這裡我們繼續介紹求一個函數的積分的幾個常用技巧，在上一篇文章中，我們介紹了代換積分法和分部積分法。代換積分法是最常見的一種求積分的基本技巧，也就是引進一個新的變數，透過一些基本的代數運算，把原來的積分化成以這個新的變數的積分，這時候所轉換的新函數常常會是一個基本函數，那我們就可以藉由基本函數的積分公式得到所要求的積分。而分部積分法是把所要積分的函數和積分變數做一個對調，這時候所要積分的函數有一個取微分的動作，經由這個動作之後，常常所得到的要積分的式子，就會變成很容易積分了。

接下來我們介紹另外一個常用的積分技巧，這個技巧要使用三角函數當作工具，所以這個技巧一般叫做三角代換法。三角函數在我們中學開始學習的時候，常常被認為是一個重要且困難的項目，大部分的同學都覺得三角函數太難了。到大學之後，我們才發現三角函數在數學上真的太有用了，他的重要性不只是可以看成是單獨的一門學問，事實上，個人覺得他更重要的，他是一個工具，解決數學問題的一個工具，在很多問題上，藉由三角函數的幫助，我們可以得到解答。三角函數使用在積分的計算上，主要是他的一些恆等式。最常用的比如說：$sin^2x + cos^2x = 1$，$1 + tan^2x = sec^2x$。或者二倍角公式：$sin2x = 2sinxcosx$，$cos2x = cos^2x - sin^2x = 2cos^2x - 1 = 1 - 2sin^2x$。舉些例子：

$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \int \frac{1}{1+tan^2\theta}dtan\theta = \int \frac{1}{sec^2\theta}sec^2\theta d\theta = \int 1d\theta = \theta + C = tan^{-1}x + C$。這裡我們做了假設

* 傅俊結，南台科技大學電子工程系副教授。

$x=tan\theta$。$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{1-sin^2\theta}}dsin\theta=\int\frac{1}{cos\theta}cos\theta d\theta=\int 1d\theta=\theta+C=sin^{-1}x+C$。這裡我們做了

$$\int\frac{1}{1-x^2}dx=\int\frac{1}{1-sin^2\theta}dsin\theta=\int\frac{1}{cos^2\theta}cos\theta d\theta=\int\frac{1}{cos\theta}d\theta=\int sec\theta d\theta=$$

$$\int\frac{sec\theta(sec\theta+tan\theta)}{sec\theta+tan\theta}d\theta=\int\frac{sec^2\theta+sec\theta tan\theta}{sec\theta+tan\theta}d\theta=ln(sec\theta+tan\theta)+C=ln\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)+C$$

假設$x=sin\theta$。。

這裡我們也是做了假設$x=sin\theta$，並用到了 $tan\theta$ 的微分是 $sec^2\theta$ 及 $sec\theta$ 的微分是 $sec\theta tan\theta$。最後用到了 $\int\frac{1}{x}dx=lnx+C$ 這個基本的積分公式。

最後我們要介紹的另外一個積分技巧，一般叫做部分分式。這個技巧特別適用在，所要積分的函數是一個有理函數的時候，我們把這個有理函數展開成他的部分分式，這時候部分分式的每一項很容易積分，那麼我們就可以求出所要求的積分。部分分式的意思，我們可以用簡單的分數來理解，例如把 $\frac{1}{6}$ 寫成$\frac{1}{6}=\frac{1}{2\times3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$ 。那麼 $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$ 就稱為$\frac{1}{6}$ 的部分分式。當我們要把一個有理函數寫成他的部分分式的時候，首先要把分母因式分解，就像把 6 因數分解成 2×3 一樣。我們舉上面同樣的一個例子，$\int\frac{1}{1-x^2}dx$，不過現在用部分分式的做法。$1-x^2$ 可以因式分解成 $(1+x)(1-x)$ ，那麼 $\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{2}(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x})$ ，$\frac{1}{2}(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x})$ 就稱為 $\frac{1}{1-x^2}$ 的部分分式。因次，

$\int\frac{1}{1-x^2}dx=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)dx=\frac{1}{2}[ln(1+x)-ln(1-x)]+C$。這個答案跟之前的用三角代換法所得到的答案 $ln\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)+C$ 看起來好像不一樣，事實上，這兩個答案是一樣的，這可以由對數的性質得到。也就是，

$$ln\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)=ln\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}=ln(1+x)-ln\sqrt{1-x^2}=ln(1+x)-\frac{1}{2}ln[(1+x)(1-x)]=ln(1+x)-\frac{1}{2}ln(1+x)-\frac{1}{2}ln(1-x)=\frac{1}{2}ln(1+x)-\frac{1}{2}ln(1-x)$$。