南台通識電子報
2021年11月15日出版 97
南台科技大學通識教育中心 發行

科普新知

積化和差和和差化積

● 傳俊結*

積化和差和和差化積是三角函數的某類數學恆等式，就是把兩個三角函數正玹和餘玹之和差寫成正玹和餘玹之積，或是把正玹和餘玹之積寫成正玹和餘玹之和差。這類恆等式在我們應用三角函數的時候，是很常用的工具，不過因為這類恆等式太多了，有時候要把它們全部背起來並不是一件容易的事，尤其如果很長時間沒用之後，當我們臨時想用時，事實上，那些公式我們是寫不出來的，尤其對一個上了年紀的老人家來說。這篇短文就是要教一個方法，讓我們可以從比較簡單的三角恆等式來推導出比較複雜的三角恆等式，例如積化和差和和差化積這類恆等式。下面就是所考慮的恆等式

和差化積：

$$\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \text{........(1)}$$

$$\sin x - \sin y = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \text{........(2)}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \text{........(3)}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \text{........(4)}$$

* 傳俊結，南台科技大學電子工程系副教授。

南台通識電子報
2021 年 11 月 15 日出版
南台科技大學通識教育中心 發行
97

事實上，藉由正玹函數的奇函數的特性，我們很容易可以從(1)推導出(2)或者從(2)推導出(1)。所以，我們所要背的和差化積公式，應該講只有三個。

積化和差：

$$sinxcosy=\frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)]\ldots\ldots(5)$$

$$cosxsiny=\frac{1}{2}[\sin(x+y)-\sin(x-y)]\ldots\ldots(6)$$

$$cosxcosy=\frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]\ldots\ldots(7)$$

$$sinxsiny=-\frac{1}{2}[\cos(x+y)-\cos(x-y)]\ldots\ldots(8)$$

上面的第(6)式只是把第(5)式的x和y對調，再用正玹函數是奇函數的特性就可以得到，所以第(5)式和第(6)式基本上也沒有什麼差別，因此，我們可以知道積化和差和和差化積的公是基本上就是六個。

三角函數是我們在學生時期，比較難以捉摸比較困難的一個科目，即使是對銳角三角形的三角函數。我想其中主要一個原因，就是三角函數一共有 6 個，即使是對銳角的三角函數，一開始要把這 6 個三角函數的定義搞懂，也不是簡單的工作，簡單的講，就是要把這 6 個三角函數的定義背起來，不會忘記，是要蠻花時間的。學了銳角的三角函數之後，接下來，我們有需要把角度的概念推廣，也就是所謂的廣義角，這時的角度可正可負，而所考慮的三角函數的角度，不再只限制在銳角，可以是任何一個廣義角。這時我們定義三角函數所需要的並不是三角形，而是一個圓。由圓所定義出的三角函數當然要包括我們中學時候所學習的銳角的三角函數。由廣義角所定義的三角函數，再加上三角函數的一些恆等式，我們就有一個很好的數學工具三角函數，藉由這些三角函數恆等式，可以解決一些看起來好像不是三角函數的問題。

接下來我們就要介紹一種由比較簡單的三角函數恆等式，來推導出比較複雜的和差化積和積化和差的三角函數恆等式。這個方法基本上還是要背一個比較簡單的恆等式，一般叫複角公式，就是下面這這幾個：

$\sin(x+y) = sinxcosy + cosxsiny$…….(9)

$\sin(x-y) = sinxcosy - cosxsiny$…….(10)

$\cos(x+y) = cosxcosy - sinxsiny$……..(11)

$\cos(x-y) = cosxcosy + sinxsiny$………(12)

我們把上面第(9)式的y改成$-y$，再用正弦函數是奇函數與餘弦函數是偶函數形的特性就可以得到第(10)式了。

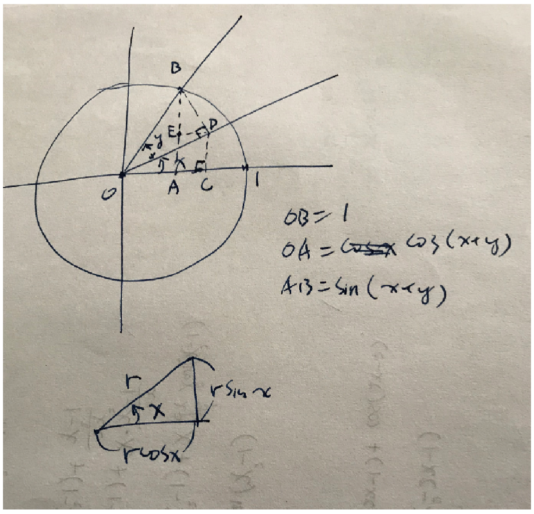
我們把第(9)式和第(10)式相加再移項化簡，就可以得到第(5)式。把第(11)式和第(12)式相加再移項化簡，就可以得到第(7)式了，積化和差的另外兩個恆等式用類似的方法也可以得到。

下面考慮和差化積：

$$sinx = \sin\left(\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}\right) = \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)+\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right))$$

$$siny = \sin\left(\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}\right) = \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x\_y}{2}\right)-\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

這裡我們用到了第(9)式和第(10)式。把上面兩個式子相加，就可以得到第(1)式了。



最後我們說明如何得到(9)(10)(11)(12)，請參考上圖。我們直接推導(11)。

上圖的圓是一個單位圓，也就是半徑等於 1 的圜。因此，OB=1，OA $=\cos(x+y)$，AB=$\sin(x+y)$，這是直接由正弦函數和餘弦函數的定義所得到的。由圖可知：$OA = OC - AC$。OD是直角三角形OCD的斜邊，而OD的長度是$cosy$，所以由餘弦函數的定義，OC的長度等於$cosxcosy$。AC的長度和ED是一樣的，因為$ACDE$是一個長方形。首先注意到角度EBD和角度DOC都是一樣的x，因為角度BOD加角度OBA加角度EBD是等於角度DOC加角度BOD加角度

南台通識電子報
2021 年 11 月 15 日出版
南台科技大學通識教育中心 發行
97

OBA，都是等於 90 度。所以，$BD = siny$，也因此，$ED = sinxsiny$。於是我們得到了(11)式。

其他的，可以類似得到。