南台通識電子報
2022年3月15日出版
南台科技大學通識教育中心 發行
99

科普新知

定積分

傅俊結*

大一的積分可以簡單分類成不定積分和定積分。不定積分的定義，基本上可以簡單地看成是微分的反運算，這個當然是建立在，我們已經學過微分的前提下，這個前提應該是成立的，因為現在全世界的大學微積分的教學，應該都是先學微分再學積分，雖然這樣的教學，明顯地違反微積分的歷史演進過程。所以我們有下列關係，在我們已經知道某個函數$F(x)$的導函數是$f(x)$的情況下，我們可以把$F(x)$，稱為是$f(x)$的不定積分或反導函數，以下列符號表示：

$F(x) = \int f(x)dx$。

歷史的發展順序是先有積分才有微分，所以一開始，積分的定義應該是 和微分沒有關係的，這就是接下來我們所要介紹的定積分。

定積分的起心動念是來自於以前的人類老祖先想要求出平面上一塊區域的面積，這也是生活上所需要的。因為農業時代，河流氾濫之後必須重新量度農地的面積，而要求平面上的區域的面積，在積分還沒發展之前，我們所能求的區域，大概就是長方形、正方形、三角形、平行四邊形、梯形等等之類的。因為這些區域都有面積公式可以算，而這些區域都有一個共同的特性，就是它們的邊界都是直線。所以，所考慮的區域，不管該區域表面上看起來有多麼的複雜，只要邊界是直線，理論上，我們一定可以求出該區域的面積。只要把該區域用直線切割成一塊一塊我們會算的的長方形或者三角形之類的，因為我們會算長方形、三角形的面積，所以只要把我們所切割出的長方形三角形的面積算出來，再加起來，就是我們所要求的區域面積。當區域的邊界不是直線的時候，我們在學微積分之前，所會算的這樣的區域面積，大概就是圓的面積，半徑的平方乘以圓周率，而這個面積公式，我們是用背的。當我們學過積分之後

* 傅俊結，南台科技大學電子工程系副教授。

，就可以推導出這個圓的面積公式。

當考慮的區域不是圓，而且邊界不是直線的時候，想要求出這樣的區域的面積，必須要有新的想法，基本上這個想法也不是很難，很複雜，直覺上也很容易理解。首先把區域切割成一塊一塊的長方形，因為長方形的面積是長乘以寬，我們會算，然後把所有的長方形的面積加起來，這個和稱為黎曼和。黎曼是將近 200 年前的一位德國數學家，這個求區域面積的方法，基本上是黎曼用來定義積分的方法，所以大一的積分有時也被稱為黎曼積分。黎曼是一個很偉大，非常偉大的德國數學家，他留給我們的數學，非常的豐富，有些工作還沒有完成，最有名的就是黎曼假說。可以這麼說，只要誰能證明黎曼假說，那他將會名傳千古。

不管把所考慮的區域切割成多少塊的長方形，其黎曼和和真正區域的面積一定會有誤差，但是直覺上，我們應該也可以感受得到，這個誤差將隨著長方形的個數愈來愈多，誤差就會愈來愈小，要怎麼樣讓這個誤差等於 0 呢？也就是沒有誤差呢？最後一步就是讓長方形的個數趨近於無窮大，來取黎曼和的極限值，這時如果黎曼和的極限值存在，則該極限值就是我們所要求的面積。注意，所求面積最後是以一個極限值來定義，而不是函數值。

接下來我們舉一個例子來說明整個上面所提到的黎曼積分的定義過程。考慮$y=x$這樣一個簡單的函數，其圖形是過原點的一條直線，這條直線和正的 X 軸的夾角是 45 度，也就是斜率等於 1，這條直線的下面，X 軸的上面，$1 \le x \le 2$，所圍起來的一個區域，是一個三角形，此三角形的面積，用三角形的面積公式，底乘以高除以二，可以算出等於 1/2。我們現在要用前面所說的黎曼積分的方法來算，也就是把三角形切割成一塊一塊的長方形，為了方便計算起見，我們切割成等寬的 n 個長方形，也就是寬度都等於 n 分之一的 n 個長方形，而第 i 個長方形的長是 n 分之 i。這樣 n 個長方形的面積加起來是$\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\cdots+\frac{n^2}{n^2}=\frac{1}{n^2}(1+2+3+\cdots+n)=\frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}$，這就是黎曼和。所以不管切割成多少塊的長方形，黎曼和和真正所要求的面積的誤差就是$\frac{1}{2n}$，最後就是讓長方形的個數 n 趨近於無窮大，這時候$\frac{1}{2n}$會趨近於零，所以黎曼和就趨近於½，而這½就是我們所要求的三角形的面積，用下列符號表示：

$\int_0^1 x dx=\frac{1}{2}$。