



函數

● 傅俊結*

函數是數學上最常見的一個專有名詞之一，從中學開始，學生上數學課時，應該常常會聽到數學老師講到這個名詞。不過，在中學階段一般都沒有給出函數一個精確的定義，可能都是在黑板上寫出一個數學式子，然後老師就說這是一個函數這樣。我們在這個短文，希望以最精簡的篇幅，給函數一個基本的理解跟認識，以及精確一點的定義，可以適用在目前技職體系大一的理工微積分課。自然界有很多的物理量，這些物理量一般都不是單獨獨立存在的，而是會和其他的物理量之間存在某種關係。當我們要研究兩個物理量之間的關係時，我們希望這兩個物理量之間有所謂的函數關係，最好是有一個數學式子來表示這個函數關係，這樣的話我們就有比較多的數學工具來研究他們。

函數基本上是一種對應的關係，只是這種對應的關係必須滿足一些條件，最重要的一個條件就是，給一個量的數值，不能對應到兩個以上的量的不同值，簡單地說就是不能一對多。我們現在舉一個例子來說明這個概念，例如說：如果我們現在想要研究人類的體重和身高的關係，那體重和身高就是我們現在所要考慮的兩個物理量。那所謂的對應關係是指什麼呢？我們現在如果先給一個 165 公分的數值，也就是身高是 165 公分，那它可能會對應到有很多不同體重的人，也許有 65 公斤，60 公斤，63 公斤等等，那我們需要的對應關係，所謂函數的對應關係，我們不允許有這樣的對應，因

* 傅俊結，南臺科技大學電子工程系副教授



為這種對應就是所謂的一對多，就是 165 公分這樣的一個身高數值對應到兩個以上不同的體重的數值。函數所認可的對應關係有兩種，一對一或者多對一。以我們現在這個例子來講，就是任給一個不同身高的數值，如果它會對應到不同的體重的數值，這種就是一對一。那所謂的多對一呢？就是可以不同身高的數值，對應到同一個體重的數值，比如說，身高 163 公分，166 公，175 公分，它們對應到的體重的數值都是 59 公斤，那這種對應在函數的定義上是可允許的，就是一種所謂的多對一。所以，當身高和體重這兩個物理量之間滿足下列的關係，我們給一個身高的數值可以對應到一個體重的數值，而且這種對應，不能一個身高的數值對應到兩個以上不同的體重的數值，只能不同的身高對應到不同體重，或者，可以不同的身高對應到同樣的體重。簡單的說，函數的對應可以是一對一或者多對一，但不能一對多。當身高和體重有這樣的對應關係時，我們就說，體重是身高的函數。記住，不能說身高是體重的函數，因為我們是先給一個身高的數值，來對應體重的數值，當你要考慮身高是體重的函數的時候，那我們的對應就要先給一個體重的數值來對應身高的數值。

接下來我們把上面那個例子抽象化，那就要引進一些數學符號。我們可以給的這些身高的數值，用一個普遍性的符號 x 來表示，我們可以給 x 不同的數值，所以這個 x 是會變的，它是一個變數，我們把這種變數稱為自變數(independent variable)，同理，體重的數值我們給它一個普遍性的符號，用 y 來表示，這 y 可以取不同的數值，所以 y 也是一個變數，我們把這個變數稱為因變數或者應變數(dependent variable)。所以函數的意義，我們現在以自變數和因變數來講的話，就是任給一個自變數 x 的數值，它只會對應到一個因變數 y 的數值。滿足這樣的對應關係，我們就說 y 是 x 的函數。給一個 x ，對應到兩個以上不同的 y 的話，那這種對應就是一對多，就不是我們所謂的函數的對應。我們只能說因變數是自變數的函數，不能說自變數是因變數的函數。 x 和 y 只是一個方便的符號，可以用不同的符號，當然你可以把 x 和 y 的角色互調，這時就是 x 表示因變數， y 表是自變數，那這時候我們可以說 x 是 y 的函數。無論如何，我們只能說因變數是自變數的函數，不能說自變數是因



變數的函數。事實上，因變數是依賴自變數在變而變，所以如果我們以英文的名詞來看的話，更能表現出自變數跟因變數的意義。自變數的英文 *independent*，一般我們翻譯成獨立的，*dependent* 一般我們翻譯成依賴，依靠的，所以如果把自變數翻譯成獨立變數，因變數翻譯成依賴變數，這樣的翻譯個人覺得可以更傳神的表現出這兩個變數的意義。時代久遠，我們不曉得當初為什麼要翻譯成自變數和因變數。

當 y 是 x 的函數時，我們可以用 $y = y(x)$ 來表示。例如： $y = x^2 + 1$ ，表示給一個 x ，會對應到 $x^2 + 1$ ，而 x 和 y 的關係是 $y = x^2 + 1$ 。另一個常見的符號是 $y = f(x)$ ，這時候 f 就表示這個函數的名字或名稱，就像人有名字一樣。函數的英文是 *function*，所以當一個函數沒有特別意義的時候，我們要給它一個名字的話，最常用的就是這個菜市場名 f 。



