科普新知

如何求一個函數的導函數

● 傅俊結*

當我們要求一個函數的導函數時，一般來講，人家會給我們該函數的表達式，這個表達式就是用來定義該函數。而這個函數的表達式會是由一些基本函數所構成的，就好像科學家跟我們講說，宇宙萬物都是由原子所構成的一樣的道理。原子之間是透過一些基本作用力來組成宇宙萬物，而基本函數是透過加減乘除四則運算以及合成的運算，來構成題目所給我們的函數的表達式。求函數的導函數的這個過程，我們可以簡稱為對該函數做微分。

從上面的簡單介紹可知，我們要做微分運算的話，首先要背一些基本函數的微分公式，這些微分公式可以從導函數的定義推導出來，不過我們不是念數學系的，或者你對數學沒有很有興趣的話，基本上可以不用管如何推導這些公式，當然，如果你對數學有非常強烈的飢渴與需求的話，我建議你可以試著去推導這些公式，因為推導這些公式的過程中，你可以了解一些基本的極限的計算和對極限的了解，而極限的知識是對微積分的完全學習是不可或缺的。背這些基本函數的微分公式的作用，有點類似我們小時候要算兩個自然數的乘積的話，我們最好也是需要背九九乘法表一樣。

把基本函數的微分公式背起來之後，我們還要背加減乘除四則運算的微分法則，因為如同我們前面所說的，我們所要微分的函數，就是由基本函數經由加減乘除所組合起來的，透過加減乘除的微分法則，我們可以把微分的計算化簡成基本函數的微分。最後，把基本函數的微分公式代進去，就可以得到我們所要求的導函數。在大一的

* 傅俊結，南臺科技大學電子工程系副教授

南台通識電子報
2023 年 1 月 15 日出版
南台科技大學通識教育中心 發行
104

微分計算所遇到的基本函數，主要就是多項式函數(polynomials)，冪函數(power function)，三角函數，反三角函數，自然指數函數，自然對數函數等等。

除了運用加減乘除的微分法則，算函數的微分還有一個很重要的工具，稱為鏈鎖律。個人認為鏈鎖律甚至比加減乘除的微分法則還重要，還基本。很多情況下，我們必須先用鏈鎖律才能運用加減乘除的微分法則。同學如果對數學很有興趣的話，強烈建議你一定要把鏈鎖律搞懂搞清楚，而不是像在讀高職時一樣，只是記住一些計算的規則，事實上，大家所背的那些計算規則，當你把鏈鎖律搞懂搞清楚之後，再多算幾個例題，那些計算的規則，順理成章地且自然地就會存到你的腦海裡。鏈鎖律是在算微分時不可或缺的一個基本工具，不管你所學的數學是大一的微積分這種基本數學，或者高深的抽象數學，他們通通叫做鏈鎖律。只要你是要算微分，一定需要鏈鎖律這個工具，所差別的只是在高深的抽象數學，它的符號和大一的微積分所使用的符號不一樣而已，但是基本上他們的思路是一樣的，理念是一樣的。

什麼時候要用鏈鎖律來微分一個函數？如何用？這時，我們一開始要把所要微分的函數，看成是一種函數與函數之間合成的結構，而不是函數與函數之間的加減乘除。合成是一個數學運算，就像加減乘除也是一種數學運算一樣。把兩個函數合成起來之後，我們可以得到一個新的函數，這個新的函數就稱為原來那兩個函數的合成函數。要理解鏈鎖律必須把合成這個數學運算弄熟悉。當要用鏈鎖律來微分一個函數的時候，必須先把要微分的函數看成是一個合成函數，這時我們必須先找出是哪兩個函數，他們的合成函數會等於所要微分的函數，而所找出來的這兩個函數，會比原來的函數更容易微分。只要我們可以微分這兩個比較容易微分的函數，那麼經由鏈鎖律，我們就可以求出一開始所要求的導函數。當然，可能微分這兩個比較容易微分的函數，我們也是需要再用鏈鎖律。所以，微分一個複雜的函數，可能會用好幾次的鏈鎖律。

最後我們舉一個例子來簡單說明上面的微分過程：

考慮函數 $(\frac{x-2}{2x+1})^3$ ，把這個函數看成是 $f(u)=u^3$ 及 $g(x)=\frac{x-2}{2x+1}$ 的合成函數，這裡 $f(u)=u^3$ 和 $f(x)=x^3$ 是同樣意思，我們寫 $f(u)=u^3$ 不寫 $f(x)=x^3$ 是怕會和 $g(x)$ 的 x

搞混。f和g的合成函數即是題目所給的函數。f的微分，即對u微分是$3u^2$，g對x微分要用到微分的除法法則，算出來是$\frac{5}{(2x+1)^2}$。鏈鎖律跟我們說所要求的導函數，就是把$3u^2$和$\frac{5}{(2x+1)^2}$相乘，這裡的$u=\frac{x-2}{2x+1}$。

南台通識電子報
2023 年 1 月 15 日出版
南台科技大學通識教育中心 發行
104