南台通識電子報
2023 年 3 月 15 日出版 105
南台科技大學通識教育中心 發行

科普新知

鏈鎖律

傅俊結*

今天我們介紹一個求函數的微分的時候，一個重要的工具叫，鏈鎖律。同學如果對微積分或者數學有強烈興趣的，我個人的建議是，您應該把鏈鎖律好好學，真的把它弄懂，不是只是背一些計算的規則，因為鏈鎖律是算函數的微分最重要的一個工具，即使你將來學的數學是很深的數學，或者很抽象的數學，只要是要做函數的微分，你一定會用到所謂的鏈鎖律，只不過那時的鏈鎖律寫出來，就是比較抽象而已，不過他們的本質都是一樣的，都叫做鏈鎖律。所以鏈鎖律有很多種不同的形式來書寫，而最簡單的形式，就是我們大一微積分所學的這個鏈鎖律。

我們回憶一下在鏈鎖律之前，我們在求函數的導函數的過程是怎麼進行的呢?首先，我們必須把題目所給的函數拆解，看成是哪些基本函數所組合起來的，而它的組合方式就是加減乘除四則運算。數學上的運算有很多，四則運算當然是最基本的運算，不過在這裡我們需要介紹一種新的運算，稱為合成運算。把兩個函數做一個合成運算，可以得到一個新的函數。假設有兩個函數f和g，他們的合成函數我們以$f\circ g$表示。定義為$(f\circ g)(x)=f(g(x))$。也就是把f函數的自變數帶$g(x)$去計算所得到的新函數。當我們要用鏈鎖律去微分一個函數的時候，我們就是要把所要微分的那個函數，看成是兩個函數的合成，而這兩個函數我們已經知道要怎麼微分，那麼我們只要把這兩個函數的微分算出來，再相乘就可以得到原來那個函數的導函數了。基本上，這就是鏈

* 傅俊結，南臺科技大學電子工程系副教授

南台通識電子報
2023 年 3 月 15 日出版
南台科技大學通識教育中心 發行
105

鎖律在算微分的過程。

我們先舉幾個例子來做兩個函數的合成計算。若$f(x)=x^5$，且$g(x)=3x^2+1$，則$(f\circ g)(x)=f(g(x))=g(x)^5=(3x^2+1)^5$。所以，當我們要求$(3x^2+1)^5$的導函數時，就必須把這個函數看成是一個合成的結構，是由f和g所合成的。再看一個例子，這個例子跟上個例子相反，上個例子是先給兩個函數，然後直接透過合成函數的定義，去計算所給兩個函數的合成函數。現在我們要先給一個函數，然後去找兩個函數，使得這兩個函數的的合成函數，是等於所給的函數。給定$\sin(x^2+1)$，我們應該把這個函數看成有兩個計算，也就是先算x^2+1，接下來再算正弦，也就是把x^2+1取正弦。所以，如果我們令$f(x)=\sin x$且$g(x)=x^2+1$，那麼很容易驗證$f(g(x))=\sin(x^2+1)$。在用鏈鎖律的時候，我們常需要的是這個例子的狀況，也就是要去找兩個函數，他們的合成函數是等於題目所給我們的函數。有時候題目複雜一點的時候，所給的函數可能必須要看成三個甚至四個以上函數的合成。例如，把前面的函數改成如下$\sin^3(x^2+1)$。這時候我們需要三個函數來表示這個函數的合成，除了前面兩個x^2+1，$\sin x$之外，還需要一個三次方的函數，如果我把這個三次方的函數叫k，即$k(x)=x^3$。那麼k,f,g的合成函數 $k\left(f\left(g(x)\right)\right)=\sin^3(x^2+1)$ 為，這就是題目給的函數。

我們現在就用上一段三個函數來說明鏈鎖律的使用。首先$(3x^2+1)^5$，因為是$3x^2+1$和五次方函數的合成，而$3x^2+1$的微分是$6x$，五次方函數的微分是五倍四次方，注意，這裡不能寫$5x^4$，因為我們在做五次方函數的運算時，並不是把x五次方，而是把$3x^2+1$五次方，所以這裡五倍的四次方是要寫$5(3x^2+1)^4$。根據鏈鎖律，所要求的導函數，即是把$5(3x^2+1)^4$和$6x$相乘。以標準符號來寫，$\frac{d}{dx}(3x^2+1)^5=5(3x^2+1)^4\cdot 6x$。第二個例子$\sin(x^2+1)$，$x^2+1$的微分是$2x$，正弦

的微分是餘弦，但此時我們是把$\sin(x^2+1)$對x^2+1微分，所以是$\cos(x^2+1)$，所求導函數為。最後這個例子，因為是三個函數的合成，所以比較複雜一點，但是基本上原理是一樣的，我們就是分別把那三個函數的微分算出來，再相乘就好了。但重點是，要注意 $\frac{d}{dx}\sin(x^2+1)=\cos(x^2+1)\cdot 2x$ 你在做這三個函數的微分的時候，必須知道你是在對什麼微分。x^2+1對x的微分是$2x$，$\sin(x^2+1)$對x^2+1的微分是$\cos(x^2+1)$，$\sin^3(x^2+1)$對$\sin(x^2+1)$的微分是$3\sin^2(x^2+1)$，所以最後結果把$\sin^3(x^2+1)$對x微分即是。由以上三個例子，我們可以發現在用鏈鎖律來微分一個函數的時候，最重要的是，同學要看得懂所要微分的那個函數的結構，很多同學不會用鏈鎖律主要就是敗在這一 $\frac{d}{dx}\sin^3(x^2+1)=3\sin^2(x^2+1)\cdot\ \cos(x^2+1)\cdot 2x$ 點上。這裡所謂的結構，就是把要微分的函數拆解成一些很基本函數的組合，這個組合在這裡主要就是合成，事實上合成函數另外一個名稱就是稱為，函數的函數，也就是說，題目的函數是由兩個以上的函數，分別依次計算，如果是三個函數的合成，那當然就是，函數的函數的函數。四個五個以上都是同樣的道理。最重要的還是同學要多做題目，藉由做題目的過程中，就可以把握住鏈鎖律的重要技巧。

南台通識電子報
2023 年 3 月 15 日出版
南台科技大學通識教育中心 發行
105