南台通識電子報
2023 年 7 月 15 日出版
南台科技大學通識教育中心 發行
107




# 多變數函數及其應用

● 傅俊結*

這篇文章簡單討論微積分中的多變數函數。多變數函數是指依賴於多個自變數的函數，其中每個變數都可以影響函數的值。多變數函數微積分涉及對這樣的函數進行微分和積分的計算。在多變數微分中，我們可以計算函數的偏導函數。偏導數表示函數對於其中一個變數的變化率，而將其他變數視為常數。偏導數可以用於描述函數在不同變數方向上的變化率。另外，多變數微分也涉及到計算梯度、方向導數和 Hessian 矩陣。梯度是一個向量，表示函數在某一點上的最大變化率和變化的方向。方向導數表示函數在某一點上沿著指定方向的變化率。Hessian 矩陣是由函數的二階偏導數構成的矩陣，用於評估函數在特定點上的曲率和凸凹性。多變數積分則用於計算多變數函數在區域上的總體效應。常見的多變數積分包括二重積分和三重積分，它們分別用於計算平面區域和空間區域上的積分值。多變數微積分的應用常常牽扯到極值的計算，下面我們介紹求多變數函數的極值的相關概念及極值判定方法。以下是一個基本的步驟：

1. 找出函數的偏導數：計算函數對於每個變數的偏導數，即求出函數在每個變數方向上的變化率。

2. 解偏導數等於零的方程組：將求得的偏導數設置為零，然後解出這個方程組，所求的解稱為該函數的臨界點，這將給出函數可能的極值點。

3. 確定極值點的類型：對於每個找到的臨界點，需要進一步分析以確定所求臨界

* 傅俊結，南臺科技大學電子工程系副教授。

點是否會產生極值，會的話，它是極大值還是極小值。這時要使用二階偏導數或者 Hessian 矩陣來判斷。

- 如果所有二階偏導數都存在並且 Hessian 矩陣是正定的，那麼該點是函數產生極小值的點。
- 如果所有二階偏導數都存在並且 Hessian 矩陣是負定的，那麼該點是產生函數極大值的點。
- 如果 Hessian 矩陣既不是正定也不是負定，那麼該點可能是鞍點或沒有極值。

需要注意的是，這些步驟僅給出了找到極值的一般方法。在具體應用中，可能會有特殊條件需要進一步的考慮。此外，極值的存在還需要考慮函數的定義域和邊界條件。另外，如果函數是在有限制條件下進行極值問題的求解，可以使用拉格朗日乘數法。這些方法將限制條件引入目標函數中，以找到在限制條件下的極值點。總結來說，求解多變數函數的極值需要計算偏導數，解方程組，並進一步分析二階偏導數或 Hessian 矩陣，以確定極值的類型。

一般來說，尋找多變數函數的極值需要考慮以下幾個步驟：

1. 找出函數的偏導數：計算函數對於每個變數的偏導數。對於一個具有 n 個變數的函數，我們需要計算出所有這些偏導數。

2. 解偏導數等於零的方程組：將求得的偏導數設置為零，並解出這個方程組。這些方程組將給出函數可能的極值點。解這個方程組可以使用代數方法或數值方法，具體取決於問題的複雜性。

3. 計算二階偏導數或 Hessian 矩陣：在找到潛在的極值點後，需要計算這些點的二階偏導數或 Hessian 矩陣。這些計算將提供關於函數在該點上的曲率和凸凹性質的信息。

4. 確定極值點的類型：根據二階偏導數或 Hessian 矩陣的結果，我們可以判斷極值點的類型。

- 如果所有二階偏導數都存在並且 Hessian 矩陣是正定的（所有特徵值都大於零），那麼該點是極小值。

・如果所有二階偏導數都存在並且 Hessian 矩陣是負定的（所有特徵值都小於零），那麼該點是極大值。

5.

・如果 Hessian 矩陣的特徵值有正有負，或者 Hessian 矩陣不是正定也不是負定，那麼該點可能是鞍點，或者沒有極值。

在實際應用中，尋找多變數函數的極值可能會遇到一些困難。這些困難可能包括：

6. 計算的複雜度：隨著變數的數量增加，計算偏導數和解方程組的複雜度會增加。在某些情況下，這可能需要使用數值方法或計算機輔助方法來進行近似計算。

7. 初始值的選擇：對於非線性函數，找到初始值以進行迭代計算是至關重要的。不同的初始值可能導致不同的極值點，因此初始值的選擇可能需要一些試驗和調整。

8. 存在多個極值點：函數可能存在多個極值點，包括局部極值和全局極值。因此，需要進一步分析和比較這些極值點的函數值以確定最終的極值。

接下來我們講一些在科學和工程領域中，求解多變數函數的極值的許多應用。以下是一些常見的應用示例：

1. 最佳化問題：求解多變數函數的極值可以應用於最佳化問題，例如在工程中設計最佳結構或系統，或者在經濟學中最大化或最小化成本或效益。通過找到函數的極值點，我們可以找到最佳解決方案。

2. 優化控制：在控制系統設計中，我們可以將目標函數視為性能指標，通過求解多變數函數的極值來找到最優的控制策略。這在機器人學、自動化和製造業等領域中都有應用。

3. 物理建模：在物理學和工程學中，多變數函數的極值可以提供關於系統行為和特性的重要信息。例如，在流體力學中，通過找到速度場的極值點，我們可以找到流體流動的穩定點或不穩定點。

4. 機器學習：多變數函數的極值在機器學習中也有應用。例如，在迴歸問題中，我們可以使用最小二乘法求解多變數函數的極小值，從而找到最佳擬合模型。

5. 經濟學：在經濟學中，多變數函數的極值可以用於最大化效益、最小化成本或

求解均衡條件。這在微觀經濟學和宏觀經濟學中都有應用。

除了這些示例外，求解多變數函數的極值在許多其他領域中也有廣泛的應用，包括金融、生物學、地理學等。這些應用涉及到對系統、數據和模型進行分析和優化，以實現最佳的結果或解釋現象。