南台通識電子報
2023 年 11 月 15 日出版
南台科技大學通識教育中心 發行
109

科普新知

三角函數的反函數

● 傅俊結*

我們要考慮三角函數的反函數，因為三角函數是週期2π的函數，所以它不是一對一的函數。我們之前說過，一個函數要有反函數的存在，它必須是一對一，因為，如果是多對一的函數，那麼它反過來對應，會是一對多，而一對多就不是一個函數的對應關係。反函數本身也是一個函數，所以它是不能一對多的。因此三角函數是沒有反函數的存在的。我們為了要考慮三角函數的反函數，必須對所考慮的三角函數的定義域有所限制，我們必須限制在一個區間，使得所考慮的三角函數在這個區間是一對一的，這樣它就會有反函數的存在了。而所要限制的區間，隨著我們考慮的三角函數的不同，也有所不同。

首先我們考慮正弦函數，$y = \sin x$，正弦函數的定義域是所有實數，如同我們前面所講的，如果不對定義域有所限制的話，正弦函數不是一對一，因此反函數不存在。習慣上，當我們要考慮正弦函數的反函數的時候，我們會把自變數x限制在$-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$，在這個區間上，正弦函數是遞增的，也就是自變數愈大其對應的函數值會愈大，所以當然就是一對一，因此正弦函數就會有反函數的存在，我們以符號$\sin^{-1}$表示。也就是說，若$y = \sin x$的話，則$x = \sin^{-1} y$。請注意，這裡的$\sin^{-1}$並不是表示

* 傅俊結，南臺科技大學電子工程系副教授

sin的負一次方，可是它跟負一次方真的太像了，所以為了避免符號的混淆，有些人不喜歡這樣寫，而是把sin^{-1}寫成$arcsin$來表示正弦的反函數，也就是說，把$x = sin^{-1}y$寫成$x = arcsiny$。要選一個區間使得正弦函數在這個區間上是一對一的話，$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$並不是唯一的選擇，事實上，有無窮多種方法來選取這樣的區間，例如$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$或者$-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq -\frac{\pi}{2}$等等。不過，數學上的習慣我們選$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$。我們舉幾個例子，如果要求$sin^{-1}(\frac{1}{2})$，因為$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$，所以$sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$。雖然有無窮多個$x$使得$sinx = \frac{1}{2}$，例如$\sin\left(\frac{13\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{25\pi}{6}\right) = \cdots = \frac{1}{2}$，但是根據我們前面所講的，正弦的反函數，也就是反正弦函數，它的值域是閉區間$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$，因此$sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$。不能寫$sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{13\pi}{6}$或者$sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{25\pi}{6}$。

接下來我們考慮餘弦函數的反函數，反餘弦函數。跟前面正弦函數同樣的道理，餘弦函數也是周期函數，所以原始的餘弦函數是沒有反函數的，因為它不是一對一函數。所以為了考慮餘弦函數的反函數，我們對於餘弦函數的定義域也是要有所限制，有所選擇。習慣上考慮餘弦函數的反函數時，我們會把定義域限制在區間$[0, \pi]$，在這區間上，餘弦函數是遞減的，所以是一對一函數，因此會有反函數的存在，以符號cos^{-1}表示。也就是若$y = cosx$的話，則$x = cos^{-1}y$。因為一開始我們限制餘弦函數的定義域在區間$[0, \pi]$，所以餘弦函數的反函數的值域也會落在這個區間。例如如果我們要求$cos^{-1}(\frac{1}{2})$的話，因為$cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$，所以$cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$。跟前面考慮的正弦函數同樣

的道理，雖然 $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{13\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$，但是 $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ 的答案，我們只能取 $\frac{\pi}{3}$，不能取其他的，因為只有 $\frac{\pi}{3}$ 滿足 $0\leq\frac{\pi}{3}\leq\pi$。三角函數一共有六個，除了前面我們考慮到的正弦和餘弦，還有四個三角函數，分別是正切、餘切、正割及餘割。如果要考慮這四個函數的反函數，一樣的道理，其定義域必須限制在某個區間，而這個區間的選擇，基本上都是為了要滿足所考慮的三角函數在這些區間是一對一的。例如正切，我們限制的定義域是 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，注意，這是一個開區間，不包括 $-\frac{\pi}{2}$ 和 $\frac{\pi}{2}$ 這兩個數，因為正切函數在這兩個點沒有定義。剩下的另外三個我們就不講了，有興趣的同學可以自己看課本，整個討論下來，我們可以發現，要考慮這六個三角函數的反函數時，原始函數所定義的區間必須有所限制，而且六個限制的區間都不一樣，不過最重要的，是我們在這裡討論的三個，就是正弦、餘弦、正切，同學只要懂這三個就可以了。