



有關三維的 Kakeya 猜測

● 傅俊結*

Kakeya conjecture 長期以來在幾何測度論和調和分析中佔據核心地位，是上個世紀最著名的數學未解問題之一。這個猜想於二十世紀初提出，其問題看似簡單，後來發現卻有深奧的數學底蘊：假設在 n 維空間中存在一個集合，它包含了每個可能方向上的單位線段。那麼這樣的集合可以有多小？更精確地說，是否每一個這樣的集合都必然具有完整的維度 n ？在二維平面中，貝西科維奇（Besicovitch）已證明可以構造出任意小測度的 Kakeya 集合，因此關於其「大小」的問題是微妙的。然而，該猜想預測，就維度而言，儘管其測度可能為零，這類集合總是儘可能地「大」。雖然二維情況早已解決，但三維猜想在歷經數十年的努力後仍頑強抵抗。直到 2025 年 2 月，這個障礙終於被突破，當時紐約大學的王虹（Hong Wang）和英屬哥倫比亞大學的約書亞·扎爾（Joshua Zahl）宣布證明了三維 Kakeya 猜想。

他們的預印本論文〈凸集並集的體積估計與三維 Kakeya 集合猜想〉（"Volume estimates for unions of convex sets, and the Kakeya set conjecture in three dimensions"）確立了任何 $\mathbb{R}^3$ 中的 Kakeya 集合都具有恰好為三的郝斯多夫維度（Hausdorff dimension）和閔可夫斯基維度（Minkowski dimension）。這一結果完全解

* 傅俊結，南臺科技大通識教育中心自然科學組副教授



決了三維版本的猜想，並代表了自湯姆·沃爾夫（Tom Wolff）在 1990 年代的突破以來，Kakeya 問題最重大的進展。數十年來，沃爾夫關於維度的下界一直是最佳已知結果，激勵了一代數學家去磨礪幾何和調和分析技術。然而，最終證明完整維度的這一步似乎難以企及。王和扎爾的成就為這一章節畫上了確定的句號，並立即被譽為本世紀具有里程碑意義的數學成果之一。

他們證明的關鍵在於發展了一個新的框架來估計凸集並集的體積。卡凱亞問題通常被重新表述為關於一組細長「管狀體」（tubes）的集合，每個管狀體長度為一，厚度為 δ ，指向不同的方向。三維猜想預測，無論這些管狀體如何排列，它們的並集所佔的體積至少必須是 $\delta^{-\varepsilon}$ 的量級（對於每個 $\varepsilon > 0$ ），這反映了該集合的滿維度特性。早期的技術在證明管狀體的配置無法過度縮小其並集體積方面取得了進展，但所得的界限始終未能達到猜想的最佳值。王虹和扎爾引入了一個幾何思想，用對凸「顆粒」（grains）的研究取代了對管狀體的直接分析，這些管狀體可以被組織到這些凸顆粒中。通過獲得這些凸顆粒並集相互作用方式的精確估計，他們能夠控制重疊部分，並證明最終的體積不可能坍塌低於滿維度的臨界值。

這種方法深受拉里·古斯（Larry Guth）等人早期工作的影響，他們引入了「顆粒性」（graininess）的概念，作為任何潛在反例的必要特徵。顆粒性原理表明，如果要在三維空間中安排所有方向的管狀體，它們將不可避免地聚集成類似凸體的團塊。王和扎爾認真對待了這種啟發性思路，並將其提升為一種嚴謹的方法，表明人們可以量化這些團塊並集的體積，而這直接蘊含了猜想。他們的論證結合了來自**incidence 幾何**（計數幾何）、測度論和調和分析的思想，將現代數學多個分支的見解編織成一個連貫的整體。

這一結果的重要性遠遠超出了 Kakeya 問題本身。Kakeya 集合與傅立葉分析中的深層問題密切相關，包括**限制性估計問題**（restriction problem）、**博赫納-里斯猜想**（Bochner–Riesz conjecture）以及**波動方程**的**局部平滑性估計**（local



smoothing estimates)。Keakeya 問題的進展歷來會推動這些相關領域的發展，而三維猜想的證明為未來的分析研究提供了新的基礎。數學家們期望，此證明中發展的技術將應用於理解更高維度（該猜想在這些情況下仍然未解）以及更廣泛地改進調和分析中的估計。

數學界內的反應迅速而且熱烈。世界領先的分析學家之一**陶哲軒**（Terence Tao）將這項工作描述為「壯觀的」（spectacular），並強調了其概念的清晰性。《廣達雜誌》（Quanta Magazine）、《科學美國人》（Scientific American）和《國家報》（El País）等媒體均報導了這項發現，稱其為「百年一遇的突破」。這一成果不僅解決了近一百年前提出的問題，也展示了當代分析學家的創造力和深度。對早已因其他開創性工作而備受認可的王虹來說，這一成就鞏固了她在同代最傑出數學家中的地位；而對扎爾而言，這代表了他多年來對 Keakeya 類問題幾何見解的頂峰。

儘管該論文仍處於預印本形式，等待嚴格的同行評審過程，但共識是其中的思想既可靠又具有變革性。該證明技術上複雜，但概念上優雅，依賴於將一個看似難以處理的連續體問題化約為一個可以進行精確估計的凸體體積相互作用問題。其核心結合了幾何與分析，體現了攻克深層數學猜想的現代風格，其中的進展往往並非來自對現有技術的逐步改進，而是以一種驚人的新方式重新構建問題。

最終，王虹和扎爾證明了在三維空間中，任何能容納每個方向線段的集合都必須擁有環境維度的全部豐富性。曾經看似悖論的共存——測度上的「薄」與維度上的「滿」——已被精確地解決。他們的證明為分析學中最持久的未解問題之一寫下了終章，同時為高維幾何及其所支配的分析結構的研究開闢了新的視野。將此稱為二十一世紀數學的里程碑，一個將在未來幾十年塑造該領域的成就，絕非誇大其詞。



