



有關黎曼猜想

● 傅俊結*

在數學史上，有許多困擾人類數十年甚至數百年的難題，而其中最著名的問題之一，就是「黎曼猜想」(Riemann Hypothesis)。它由德國數學家 Bernhard Riemann 於 1859 年提出，至今已超過一百六十年仍未被正式證明或推翻。由於這個猜想與質數的分布有極其密切的關係，因此被認為是現代數論最重要的問題之一。2000 年，Clay Mathematics Institute 將它列入七大「千禧年大獎難題」，任何人若能給出正確證明，將可獲得一百萬美元獎金。

要理解黎曼猜想，首先必須認識質數。質數是只能被 1 和自己整除的正整數，例如 2、3、5、7、11 和 13 等。從古代開始，人們就知道質數是所有整數的基本組成元素，因為任何整數都可以分解成質數的乘積。然而，質數的出現看似毫無規律，例如在某些區域十分密集，在某些區域卻相當稀少。數學家長久以來一直希望找到一套規律，來描述質數究竟是如何分布的。

十九世紀時，黎曼研究一個特殊的數學函數，稱為黎曼 ζ 函數 (Riemann zeta function)。這個函數最初看起來與質數毫無關係，但黎曼發現，當函數延伸到複數領域後，其零點的位置竟然與質數分布存在深刻聯繫。所謂零點，就是讓函數值等於零

* 傅俊結，南臺科技大學通識教育中心自然科學組副教授



的位置。黎曼發現，有一些零點十分特殊，它們被稱為「非平凡零點」。經過大量分析後，他提出一個大膽的猜測：所有非平凡零點都位於複數平面上一條稱為「臨界線」的直線上，而這條線的實部等於二分之一。

這句話聽起來十分抽象，因此許多人第一次接觸黎曼猜想時，往往不知道它的重要性。事實上，若把黎曼猜想翻譯成比較容易理解的語言，它的核心意義是：質數雖然看似雜亂無章，但其實隱藏著極其精確的規律，而黎曼猜想描述的正是這種規律的精確程度。若猜想成立，數學家便能以遠超目前的方法來估計質數在不同範圍中的分布情況。

十九世紀末，數學家已經證明著名的「質數定理」，指出當數字愈來愈大時，質數出現的平均密度會逐漸下降，並且能以對數函數近似描述。然而這個定理只能給出大致趨勢，無法精確說明實際分布與理論值之間的誤差。黎曼猜想若成立，便能大幅限制這種誤差，使數學家更精準地掌握質數的位置。因此許多數論結果都建立在黎曼猜想成立的前提上。

除了純數學研究外，黎曼猜想還與現代資訊科技有間接關係。目前廣泛使用的 RSA 加密系統便依賴大質數的特性。雖然即使黎曼猜想被證明，也不會直接破解現有加密系統，但它能夠加深人類對質數結構的理解，進而影響未來密碼學的發展。因此，黎曼猜想不僅是理論問題，也具有實際應用價值。

一百多年來，無數數學家試圖證明這個猜想。二十世紀初，人們利用計算機開始驗證大量零點的位置。最初只驗證幾百個零點，後來增加到數千個、數百萬個，甚至數兆個以上的零點。令人驚訝的是，所有已被檢查過的非平凡零點都位於實部等於二分之一的臨界線上。這些結果雖然提供強有力的支持，但在數學上，無論驗證多少個例子，都不能取代完整證明，因此黎曼猜想依然是一個猜想。

隨著研究深入，數學家逐漸發現黎曼猜想與許多領域產生聯繫。例如量子力學中的能譜結構、混沌理論中的統計分布，以及隨機矩陣理論等，都出現與黎曼零點十分



相似的現象。特別是在隨機矩陣理論中，研究者發現零點之間的排列方式與原子核能階的統計特徵驚人相似。這種跨領域的關聯使許多人相信，黎曼猜想背後可能隱藏著尚未被發現的深層數學結構。

那麼，最近幾年有什麼重要進展呢？截至 2026 年，黎曼猜想仍然沒有獲得數學界正式承認的證明。然而，近年來陸續出現多篇聲稱完成證明的論文。例如日本研究者 Yukitaka Abe 自 2025 年至 2026 年間多次發表與修訂聲稱證明黎曼猜想的論文，但目前仍屬於未經正式同行評審驗證的研究成果，尚未獲得數學界普遍接受。此外，2025 年至 2026 年間也有其他研究者在預印本網站上發布聲稱證明黎曼猜想的文章。然而數學史顯示，許多看似成功的證明最終都被發現存在漏洞，因此學術界對此類宣稱通常保持高度謹慎。實際上，幾乎每隔幾年就會出現新的「證明」，但經過專家檢驗後大多數都無法成立。

另一方面，真正受到數學界重視的進展，往往不是直接宣稱完成證明，而是建立新的理論框架。例如法國著名數學家 Alain Connes 於 2026 年發表一篇長篇綜述，整理過去一百六十多年來關於黎曼猜想的重要成果，並提出新的幾何與資訊理論觀點，希望能為未來證明提供新的方向。雖然這些工作尚未解決問題，但可能成為未來突破的基礎。目前多數數學家仍傾向相信黎曼猜想是正確的。除了大量數值驗證外，它與其他數學理論之間展現出的高度一致性，也使研究者認為其成立的可能性相當高。然而在數學中，信念不能代替證明。只有找到嚴格且無懈可擊的邏輯推導，才能真正解決這個問題。正因如此，黎曼猜想至今仍是數學界最具挑戰性的難題之一。

總結而言，黎曼猜想起源於十九世紀對質數分布的研究，其內容雖然可以簡單表述為「所有非平凡零點都位於實部等於二分之一的直線上」，但背後卻蘊含極其深刻的數學意義。它不僅關係到質數的規律，也與分析學、代數學、幾何學、量子物理以及資訊科學等領域產生聯繫。經過超過一百六十年的努力，人類仍未找到最終答案，但正是在追尋答案的過程中，誕生了大量重要的數學理論與方法。無論黎曼猜想未來被



證明為真或被推翻，它都將成為數學史上最偉大的成就之一，而人類對數學真理的探索，也將因此邁向新的階段。

